硕士学位论文

基于能量守恒积分方法的
结构非线性分析

NONLINEAR ANALYSIS
BASED ON
THE ENERGY-CONSERVING TIME
INTEGRATION METHODS

汤 振

哈尔滨工业大学

2014 年 **7** 月

国内图书分类号：TU393.3　　学校代码：10213
国际图书分类号：624　　密级：公开

工学硕士学位论文

基于能量守恒积分方法的结构非线性分析

硕 士 研 究 生：汤 振
导　　师：吴 斌 教授
申 请 学 位：工学硕士
学　　科：结构工程
所 在 单 位：土木工程学院
答 辩 日 期：2014 年 7 月
授予学位单位：哈尔滨工业大学

Classified Index: TU393.3
U.D.C: 624

Dissertation for the Master Degree in Engineering

NONLINEAR ANALYSIS BASED ON THE ENERGY-CONSERVING TIME INTEGRATION METHODS

Candidate: Tang Zhen

Supervisor: Prof. Wu Bin

Academic Degree Applied for: Master of Engineering

Speciality: Structural Engineering

Affiliation: School of Civil Engineering

Date of Defence: July, 2014

Degree-Conferring-Institution: Harbin Institute of Technology

摘 要

无论是混合试验还是有限元数值分析，逐步积分方法都是关键的计算方法，但是各个积分方法却具有不同的稳定性和精度特性。判断一个积分方法在线性和非线性情况下的稳定性可以采用能量准则，那么基于能量准则来建立平衡方程的逐步积分方法就可以具有无条件稳定性的特性，因此能量守恒积分方法受到越来越多的关注。但是能量守恒积分方法在实际工程中的应用仅限于航天领域，并没有应用到土木工程领域中。因此，本文研究能量守恒积分方法在大跨空间结构中的应用，主要研究内容如下：

1. 对能量守恒积分方法与平均加速度方法进行了积分方法能量的研究，从能量的角度判断平均加速度方法与能量守恒积分方法的数值稳定性。分析结果表明能量守恒积分方法是一种无条件稳定的方法，而平均加速度方法则存在能量增量，是一种条件稳定的积分方法。
2. 为了将能量守恒积分方法应用到土木工程领域，本文将能量守恒积分方法作为子程序添加到 OpenSees 中，通过简单的单摆算例验证了编程的正确性和有效性。分析时采用了能量守恒积分方法、平均加速度方法以及梯度法，通过能量准则来判断积分方法的稳定性。结果表明能量守恒逐步积分方法在每个积分步都不存在能量增量，即能量增量为 0，因此是一种无条件稳定的积分方法；平均加速度方法能量增量不为 0，为条件稳定；梯度法能量增量为负，能量有界，因而无条件稳定。
3. 为了研究能量守恒积分方法在大跨空间结构中的应用，分别对平面桁架结构、四边支承网架结构以及一个实际工程加油站屋盖的网架结构进行分析，结果表明，本课题完成的能量守恒积分方法子程序可以完成二维或者三维的大跨空间结构动力分析。主要分析几种非线性因素对积分方法稳定性的影响，结果显示，平均加速度方法是条件稳定的，而能量守恒积分方法则是无条件稳定。并且，在考虑材料非线性的时候，材料非线性越大，平均加速度方法计算的误差越小。另外，当考虑弹性屈曲的时候，随着屈曲力的减小，平均加速度方法计算误差增大。最后，对于考虑几何非线性的平均加速度方法，提出了使用的稳定条件，并通过算例进行了验证，验证了方法的可行性和有效性。

关键词：能量守恒积分方法；数值稳定性；能量准则；大跨空间结构；几何非线性；材料非线性；平均加速度方法；OpenSees

Abstract

A time integratuion algorithms is the key element of the hybiid test or the finite element analysis. But the stability and accuracy of the integratuion algorithms should be considered. The energy approach can be used to judge the stability of a time integration used in the linear or nolinear analysis. So the stepwise integration algorithms peforming the equations of motion based on energy approach are unconditionally stable for linear or nolinear structures. Therefore, the energy-conserving integration methold becomes more and more popular. However, the energy-conserving integration methods are just applied in the field of space flight. although the application in the field of civil engineering is rare. The application of the energy-conserving integration methods in the large span space structure is studied in this dissertation, and the main work and results are as follows:

1. The energy-conserving time integration method and the average acceleration method are studied. The stability of these two integration methods are studied with the energy of the system. The theoretical analyses shows that energy-conserving time integration method is unconditionally stable, and the average acceleration method is conditionally stable because of its increment in energy.
2. In order to apply the energy-conserving time integration method to the field of civil engineering, this method is added to the OpenSees software platform as a subprogram, and a simple pendulum numerical example is used to prove the correctness and the effectiveness of this program. The energy-conserving time integration method, the average acceleration method and the TRBDF2 method are studied in this example. The energy approach is used to prove that the energy-conserving time integration method with no increment in energy is unconditionally stable; the average acceleration method with some increment in energy is conditionally stable and the TRBDF2 method with negative increment in energy is unconditionally stable.
3. In order to study the application of the energy-conserving time integration method in the large span space structure, some analysis in the plane truss structure, three dimensional truss structure and the roof of a gas station show that the subprogram

added to the OpenSees software platform can be used to do dynamic analysis in both two dimensional and three dimensional truss structure. The geometric nonlinearity and material nonlinearity in structure is studied to research how nonlinearity influences the numerical stability of an integration method. The results show that the average acceleration method turn to be conditionally stable when geometric nonlinearity is considered, and a smaller time step is needed to make it stable. With the integration step increasing, the error of the average acceleration method becomes bigger，while the material nonlinearity getting increasing, the error becomes smaller. The same phenomenon can be seen while the elastic buckling force is getting lower. A stability condition is proposed and proved to be effective. Relatively the energy-conserving time integration method is unconditionally stable.

Keywords: energy-conserving time integration method；average acceleration method；energy approach；numerical stability；OpenSees，large span space structure；geometric nonlinearity；material nonlinearity

目　录

摘 要 I
Abstract II
目　录 IV
第 1 章 绪 论 1
1.1 课题研究背景 1
1.2 逐步积分方法的研究现状 2
1.2.1 逐步积分方法概述 2
1.2.2 经典的逐步积分方法 4
1.3 基于能量守恒的逐步积分方法 5
1.3.1 Hughes 能量法 7
1.3.2 Simo 能量法 7
1.4 本文主要内容 9
第二章 能量守恒积分方法 11
2.1 引言 11
2.2 能量守恒积分方法简介 11
2.2.1 平均加速度方法（AAM） 11
2.2.2 能量守恒积分方法（ECM） 12
2.3 积分方法的能量 14
2.3.1 积分方法稳定性判断 14
2.3.2 平均加速度方法 14
2.3.3 能量守恒积分方法 18
2.4 本章小结 19
第三章 能量守恒积分方法在 OpenSees 中的实现 20
3.1 引言 20
3.2 OpenSees 软件框架 20
3.2.1 OpenSees 简介 20
3.2.2 OpenSees 动力分析过程 21
3.2.3 OpenSees 动力分析代码实现 23
3.3 能量法在 OpenSees 中的实现 25
3.3.1 能量守恒积分方法的等效刚度矩阵 25
3.3.2 能量守恒积分方法的实现 26
3.4 简单算例验证 32
3.4.1 动力响应 34
3.4.2 积分方法的能量 36
3.5 本章小结 39

第四章 能量守恒积分方法的应用 40
4.1 引言 40
4.2 平面桁架应用 40
4.2.1 线弹性材料 41
4.2.2 双线性材料 45
4.2.3 计算效率 47
4.3 四边支承网架应用 48
4.3.1 线弹性材料 49
4.3.2 双线性材料 52
4.3.3 计算效率 53
4.4 本章小结 54
第五章 积分方法的影响参数分析 56
5.1 引言 56
5.2 加油站屋盖网架设计参数 56
5.3 非线性参数分析 57
5.3.1 双线性材料第二刚度影响分析 57
5.3.2 弹性屈曲力影响分析 60
5.3.3 平均加速度方法的稳定条件 62
5.4 本章小结 65
结 论 66
参考文献 68
哈尔滨工业大学学位论文原创性声明和使用权限 72
致 谢 73

第 1 章 绪 论

1.1 课题研究背景

地震是当地壳运动时局部区域在短时间内快速释放大量能量从而产生振动的过程中，产生地震波的一种自然现象。一般是由于板块构造运动时，板块与板块之间的相互碰撞挤压，造成板块边缘的错动和破裂，从而引起地面强烈的振动。事实上，地震作为一种强力的自然灾害，对世界上很多国家、地区造成了巨大的破坏和损失。苏门答腊岛附近海域 2005 年 3 月 28 日发生里氏 8.5 级地震，这是自 1900 年以来人类历史上发生的十一大最强烈地震之一，造成 1000 人死亡，所幸未引发海啸；2006 年 5 月，印尼发生 6.4 级地震，造成约 6000 人死亡，2 万人受伤，20 万人无家可归；2010 年 1 月 13 日，海底地震，7.3 级，死亡人数 30 多万；2010 年 2 月 27 日，智利发生 8.8 级地震，799 人死亡，并引发了海啸；2011 年 3 月 11 日，日本本州东海岸地震，9.0 级，造成 10901 人死亡，17649 人失踪。而我国处于环太平洋地震带和喜马拉雅-地中海地震带之间，成为世界上每年遭受地震灾害最多的国家之一。1556 年陕西关中 8 级地震，造成死亡 80 余万人；1920 年宁夏海原地震，8.5 级，造成死亡 20 余万人；1976 年著名河北唐山大地震，7.8 级，造成 24 万人死亡；2008 年四川汶川地震，8.0 级，死亡 69200 人，18195 人失踪，还有 2010 年 4 月青海玉树地震、2011 年 3 月云南盈江地震均造成大量的人员伤亡和经济损失。一次次的地震给人类社会造成了不可估量的损失，因此各国的土木工程研究者们都在致力于如何防震减灾，从而降低地震对社会造成的伤害。

防震减灾，顾名思义就是防御和减轻地震灾害的对社会的影响。在土木工程领域，其主要的解决方案是通过设计来提高建筑物的防震能力。了解一个建筑物的抗震能力可以通过进行建筑结构抗震试验或者有限元数值模拟来得出结论。一般通常使用的建筑结构抗震实验有三种，分别是循环往复试验、拟动力试验以及振动台试验，由于循环往复试验无法考虑地震作用对建筑结构的影响，而振动台试验则由于振动台的尺寸和承载能力的限制，试验结构只能采用缩尺模型来进行，无法真实的反应结构在地震作用下的行为和反应。拟动力试验针对上述两种方法的缺点，把实时动力试验改为慢速加载实验，并且由于子结构试验方法的提出，使大比例尺甚至是足尺结构试验得以实验，这样的方法称为混合试验方法。混合试验方法固然是一种能够最直接反应结构抗震性能的方法，但是当经费不足时，用有限元软件来建立建筑结构的模型，通过软件来模拟结构在地震作用下的行为，

了解结构的抗震性能也是一种被广泛应用的方法。

无论是对拟动力试验方法还是对有限元软件动力分析，其差别仅在于两者的恢复力来源不同：拟动力试验的恢复力来源于试验测得，而有限元软件数值分析的恢复力来源于数值计算。因此，对两种方法来说，逐步积分方法都是关键环节。传统的拟动力试验方法采用的一般都是条件稳定的显示逐步积分算法，隐式逐步积分方法虽然开始也被应用到试验中，但是对于越来越复杂的结构和材料，隐式方法并不能保证无条件稳定。而在有限元软件中，进行动力分析时，软件提供的积分方法也是如此。因此，无论是对试验还是对有限元软件来说，亟需一种更为适用的逐步积分方法。

1.2 逐步积分方法的研究现状

1.2.1 逐步积分方法概述

当我们将结构在空间上离散，就将整体的连续结构通过网格划分转化为有限元模型，然后再在连续时间上将有限元模型的运动方程离散，这样就使得一个连续的无穷多个自由度问题离散称为有限个自由度的有限元分析问题。

因此，对于一个结构的动力分析，可以简化为如下的有限元系统运动方程

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{U}(t)=\mathbf{q}(t) \qquad (1\text{-}1)$$

其中$\mathbf{M}$、$\mathbf{C}$和$\mathbf{K}$分别表示被分析结构体系的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，$\mathbf{q}(t)$是外荷载向量，而 $\ddot{\mathbf{U}}(t)$、$\dot{\mathbf{U}}(t)$和$\mathbf{U}(t)$是分析的结构体系各点上的加速度向量、速度向量和位移向量。从数学的角度来说，上式是一个二阶常微分方程组，由于在有限元动力分析中，矩阵的阶数由分析的建筑结构自由度决定，这个阶数会很高，因此采用一般求解常微分方程组的标准算法，像 Runge-Kutta 法，是不经济的，因而对有限元动力分析一般采用直接积分方法。直接积分方法是对运动方程不做任何变换，直接对运动平衡方程进行求解的方法[1]。

从本质上来说，直接积分方法是基于两个原则：一个是不再要求在求解时间域内的任意时刻 t 均应满足系统的运动平衡方程，而是要求在离散的时间点，也就是积分时刻点 0，Δt，$2\Delta t$，…上满足平衡方程，即上述平衡方程是基于时间域上的离散点建立的；二是在各个积分时刻之间，对位移$\mathbf{U}(t)$、速度$\dot{\mathbf{U}}(t)$和加速度$\ddot{\mathbf{U}}(t)$进行假设，使其满足一定的函数关系，而这个是决定各种积分方法在精度和稳定性上的高低。

本文主要讨论等积分步长的积分方法，即将连续时间域 0~T 分成 n 个等时间

段 0，Δt，$2\Delta t$，…$n\Delta t$，其中$\Delta t = T/n$，并且已经求得 t 时刻和之前时刻的解，现在求 $t+\Delta t$ 时刻的反应量。在建立了求解 $t+\Delta t$ 时刻的平衡方程的算法之后，就可类似的求出所有离散时间点上的解。这样逐步地通过前面求出的解将每一个积分时间点上的解求解出来的方法称为逐步积分方法。

在动力分析中主要使用的逐步积分方法可以分为两种，一种是显式方法，另一种被称为隐式方法。如果在 $t+\Delta t$ 时刻的位移 $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ 可以由 t 时刻和 t 时刻之前的反应量来表达，那么这种方法称为显式方法，反之则为隐式方法。实际上，显式方法与隐式方法的本质区别在于显式方法在求解 $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ 的时候利用的是 t 时刻的平衡条件，而隐式方法为了求解 $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ 需要根据 $t+\Delta t$ 时刻上的平衡条件。在应用逐步积分方法来求解未知量的过程中，显式方法是将有限元系统的运动平衡方程表达成为以 $t+\Delta t$ 时刻的位移 $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ 为未知量的线性方程，而隐式方法则最后形成了关于位移 $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ 的非线性方程。

由于逐步积分方法是一种计算有限元体系近似解的求解方法，对于位移、速度和加速度的假设并不符合实际，因此在每一个积分步的计算中都会不可避免的引进误差，其中一部分是截断误差，另一部分为舍入误差。虽然每一步的误差并不大，但是随着求解过程的进行，这些误差会不断的累积、放大，从而导致计算结果越来越偏离真实解，甚至是发散，这种现象被称为一个积分方法的数值稳定性问题。当一个逐步积分方法，对于任意的初始条件，不论积分步长Δt 取何值，其计算结果都不会无限增大，则称该方法为无条件稳定算法。相反，若积分步长Δt 必须在一个临界值以内，积分算法的计算结果才不会不断增大且没有边界，那么这种方法就被称为条件稳定积分方法。因此在进行拟动力试验或者有限元软件动力分析时，需要考虑逐步积分方法的计算精度和数值稳定性特性，来选择逐步积分算法。

对于线性体系，各种逐步积分方法的稳定性和精度已经在很多文献中有过详细的讨论，各算法的精度和稳定性的比较和研究也比较完善。一般对于大多数的显示积分方法而言，当应用在线性体系中，是有条件稳定的，并且其稳定界限与采用的积分步长以及结构的频率有关。而隐式积分方法在线性体系中一般都为无条件稳定。在拟动力试验和有限元分析软件中，一些逐步积分方法被广泛采用，并且这些方法是通过在离散时间点上建立结构的力的平衡方程来进行的。然而有必要指出的是，逐步积分方法在非线性体系中的稳定性问题与在线性体系中并不一致，仍然需要进一步探讨。有学者已经指出逐步积分方法在对非线性动力分析时发散产生的潜在危险[2]。已有的研究结果表明，大多数的隐式积分方法实际上时

A 类稳定，也就是对于线性系统是无条件稳定的，但是对于任意非线性问题却不一定能够稳定[3,4,5,6]。

1.2.2 经典的逐步积分方法

由于显式积分方法在计算时不需要迭代，因此每一步的计算速度比较快，这就使得这类方法在进行大型结构的动力分析时有一定的优势。应用最广泛的一种显式积分算法是中心差分法，但是当系统的自由度很高时，需要积分步长选的很小。另外中心差分法还要求有限元体系的质量矩阵的对角元素均大于 0，因此这是一种条件稳定的算法。将中心差分法应用到复杂结构时，如果运动方程中的阻尼矩阵不是非对角矩阵时，计算量将极大增加。因此针对这一缺点，有学者提出采用修正的中心差分法[7]。但是经过修正之后的中心差分法，不仅其精度下降，稳定性也下降了。为了解决这个问题，李小军等人[8]采用平均加速度方法对于速度和加速度的算法假定，在中心差分法的基础之上提出了一种显式方法。之后，杜修力等人[9]也提出了一种显式格式的逐步积分方法。通过分析，证明这两种算法在精度和稳定性特性上均优于修正的中心差分法，并且杜修力等人提出的方法精度要好于李小军等人提出的积分方法。

以上介绍的显式积分方法均是有条件稳定的算法，有文献[10]对算子分解法进行了分析，证明了这种方法在线性体系中应用时是一种无条件稳定的显式积分算法，但是当结构中包含非线性问题时，计算精度并不理想。S.Y.Chang [11]也提出了一种显式积分方法应用在拟动力试验中，并证明这种方法在线性体系中无条件稳定，而且其精度和稳定性特性与平均加速度方法一致，不过当结构包含非线性问题时，这种方法的精度和稳定性还需要进一步的研究。

隐式积分方法由于其一般可以在线性体系的动力分析中具有很好的无条件稳定特性，因此通常隐式方法比显式方法应用更广泛。一般常用的隐式积分方法有 Newmark-β 方法、α-方法以及 Wilson-θ 法。Newmark-β 法[12]可以通过调整方法中的参数 β 和 γ 来调整这种积分方法的数值精度和稳定性。其中本文研究重点之一的平均加速度方法就是是 Newmark-β 法系列中被最常应用的一种积分形式，它的参数 β=1/4，此时积分方法对于线性系统问题为无条件稳定。

对于很多的结构，系统的动力响应主要受到低阶振型的影响，高阶振型所占比例很小，因此，有时候进行结构动力分析时只需要留下低阶模态，而将高频分量滤除。针对这个需要，Wilson-θ 法[13,14]被提出。该方法包含一个重要参数 θ，并且当 $\theta \geq 1.37$ 时该方法具有无条件稳定的特性，一般应用时取 θ=1.4。由于 Wilson-θ 法引入了数值阻尼，能够在高频段对动力响应进行一定的过滤，并且这种过滤作

用是可控的，可以通过调节系数 θ 来调节。但是一般应用的 θ=1.4 引入的数值阻尼比较大，这种过滤作用不仅对高频分量有影响，对低阶振型的分量也有明显的数值阻尼，这就导致了积分方法的计算精度大大降低。由 Wilson-θ 法可以知道，一个好的逐步积分方法应该在高频段有一个可以控制的数值阻尼，从而有效的滤除一些不正确的高频振型分量，并且在低频段时数值阻尼应该越小越好，从而保证积分方法分计算精度不因此降低。基于这个方法标准，Hilber 等学者提出采用一种称为 α-方法[15]。该方法的主要思想是在离散的运动平衡方程中引入数值参数 α，并且当这个参数满足一定条件的时候，α-方法在线性系统中是无条件稳定的。与 Wilson-θ 法相比，α-方法的数值阻尼就能够被很好的调整，来达到既滤去高阶振型，对低阶振型的数值阻尼也不会过大，从而保证了计算精度。另外，以 α-方法为基础，Chung 和 Hulbert 对该方法中的系数 α 进行扩展，由此提出广义-α 方法[16]，这种方法比普通的 α-方法具有更低的低频段阻尼，从而提高了积分方法的计算精度。

一般的积分方法只具有一阶或者二阶精度，王焕定等人[17]提出了高阶单步法，这种方法使得积分方法的精度得到了提高。算法中包含参数 β，通过对参数 β 的选取，可使算法达到三阶甚至是四阶精度。另外，也有别的学者提出了高精度的逐步积分算法。例如，钟万勰提出的精细积分方法[18]，虽然该方法是条件稳定的，但是具有很高的稳定界限[19]。精细积分方法可以达到高阶精度的计算结果，但是增加了动力分析的计算工作量。值得注意的是，以上两种方法应用在非线性体系中时，都是通过建立关于未知量的非线性方程来求解，此时两种方法都是隐式积分方法。

1.3 基于能量守恒的逐步积分方法

前面介绍的经典的逐步积分方法应用在线性体系时通常都是无条件稳定的，而这种积分方法的稳定性一般都是通过谱分析来判断的。但是进入到非线性体系中，这些方法的稳定性就有变化了。像广义-α 方法这种在线弹性体系中无条件稳定的算法，在进行包含几何非线性的结构动力分析时，其引入的数值阻尼没能发挥耗能作用，最后的计算结果发散了。在文献[3]中，Xie 等人利用平均加速度方法进行非线性弹性体系的动力分析时，出现了发散的结果。因此，利用谱分析判断积分方法的稳定性在非线性系统就不再适用了[20]。判断一个逐步积分方法的稳定性，可以采用能量准则[21]，也就是保证计算出的系统的数值解表达出的某种能量形式的值在整个积分计算过程中不会由于逐步积分方法的算法假设和离散而过多的扩大或缩小。李妍等人[22,23]从理论上证明了平均加速度方法在两类比较常用的非线性结构中也能无条件稳定，一类是含有界非线性力的结构，另一类是非线性

阻尼结构。

从上个世纪六七十年代开始，有学者提出利用能量守恒来建立体系的运动平衡方程，这样的积分方法可以被统称为能量守恒积分方法[24]。由于能量守恒积分方法无论是在线性体系还是在非线性体系中均能够达到无条件稳定，因此越来越多的学者开始关注这一类方法。

为此，两类能量守恒积分方法被提出，一类称为 Simo 能量法，另一类由 Hughes 提出，称为 Hughes 能量法，这两种方法将在本节被具体介绍。Hughes 能量法提出的较早，之后其他能量方法或者基于不同的单元，或者考虑不同的材料，国内外学者都在这个领域展开了研究。

Crisfield 和 SHI 两人基于 Simo 能量方法，提出了应用于考虑共旋的桁架单元的能量守恒积分方法，之后又将这种理论扩展到了三维共旋梁单元中[25]。由于两人主要考虑共旋，因此 I.Romero 和 F.Armero[26]两人基于精确梁理论提出了一种能量守恒积分方法，方法限定了弹性的使用范围，此后两人又提出了基于壳单元的能量守恒积分方法，不过该方法实际上是采用了数值阻尼，体系的能量会有耗散[27]。同样的基于梁单元，Adnan 等针对考虑旋转的三维梁单元提出了一种能量守恒积分方法[28]，但是这种方法精度有所下降，因为引入了数值阻尼，造成了能量的耗散，但是这种耗散可以控制，并且可以通过结点速度的更新调整，将方法在必要的时候切换回单纯的能量守恒方法。在梁单元的层次上，也有其他学者的研究。M.Gams 等人[29]针对考虑几何非线性的平面弹性梁结构提出了一种能量守恒积分方法，该方法的特色在于采用了非传统的应变更新格式，并且从理论上证明了方法的能量守恒特性，因此是无条件稳定的积分方法。

也有学者在求解平衡方程时有别的方法。P.Betsch 和 P.Steinmann[30]提出了一种能量守恒积分方法，该方法利用多项式插值逼近来求解时域离散的运动平衡方程。之后 E.Graham 等人将这种方法与 Simo 提出的能量法进行比较[31]，发现在多体问题中，质量块之间的距离保持恒定的时候，两种方法得到相似的结果，不过，前者的能量并不完全守恒。

一般的积分方法都是一个积分步来实现，有研究将积分步拆开。针对大变形或者长周期的结构，William Taylor 等人提出一种将一个积分步分为两个子步的积分方法，该方法虽然是无条件稳定的，但是会引入较大的数值阻尼[32]。

从上个世纪七十年代以来，多种能量守恒积分方法被提出，据此，Ignacio Romero 通过一个应力张量的形式将能量守恒积分方法整合成一个整体[33]，应力张量的不同显示不同的积分方法，不过该方法只针对弹性动力学。

我国也有学者对能量法有所研究，肖潇等人[34]对传统的拉格朗日方程进行修

正，通过增量的近似和修改力的方法，使其满足能量和动量的守恒，将该方法应用于空间薄膜结构的展开分析中，保证了计算精度和数值稳定性。

以上介绍的多种能量守恒积分方法很多都是基于 Simo 能量法和 Hughes 能量法提出来的，或者对两种方法进行改进，或者进行扩展，因此这两类能量法是能量守恒积分方法领域的核心。下面重点介绍 Hughes 能量法与 Simo 能量法。

1.3.1 Hughes 能量法

如果通过能量守恒的关系来建立结构体系的运动平衡方程，那么经过积分的得到的结果也是符合能量准则的，从而就能进一步的保证积分方法在非线性体系中的稳定性。对此，T.J.R.Hughes[35]提出在离散动力方程时引入能量约束项，从而形成约束能量方法，也就是 Hughes 能量法。对于简单的系统，不考虑外力作用，并且不计阻尼，其表达式为：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}+\mathbf{R}(\mathbf{U}_{t+\Delta t})+\lambda_{\mathrm{E}}\frac{\partial\Delta E(\mathbf{U}_{t+\Delta t})}{\partial\mathbf{U}_{t+\Delta t}}=0 \tag{1-2}$$

其中 λ_{E} 为常数，$\Delta E(\mathbf{U}_{t+\Delta t})$ 为理解为两个积分步之间的能量增量的函数表达形式。很显然，Hughes 能量法是一种隐式积分方法。可以看出，Hughes 能量法是在一般的平衡方程中加入了第三项 $\lambda_{\mathrm{E}}\frac{\partial\Delta E(\mathbf{U}_{t+\Delta t})}{\partial\mathbf{U}_{t+\Delta t}}$ 来约束能量，但是这一项的物理意义并不明确。另外，由于该方法采用了平均加速度法的假定，当积分步长 Δt 很小的时候，$\lambda_{\mathrm{E}}\frac{\partial\Delta E(\mathbf{U}_{t+\Delta t})}{\partial\mathbf{U}_{t+\Delta t}}$ 的值会很大，从而可能导致平衡方程求解失败，这一问题已经在文献中出现[36]。之后，Kuhl 等人[37,38]也采用相同的能量约束项来改进 α 方法，同时也考虑了动量守恒方程，但是最后这种方法仍然与 Hughes 能量法存在相同的问题。

1.3.2 Simo 能量法

之后，J.C.Simo[39]以平均加速度方法的基本假定为基础，以能量准则为依据，提出了能量动量守恒积分方法。与 Hughes 能量法相同，也仅考虑没有外力作用和阻尼作用的简单系统，使下述的能量方程得到平衡：

$$\begin{aligned}&\Delta E_{t+\Delta t}=\Delta E_{\mathrm{K},t+\Delta t}+\Delta E_{\mathrm{P},t+\Delta t}\le 0\\&\Delta L=0,\Delta J=0\end{aligned} \tag{1-3}$$

式中$\Delta E_{t+\Delta t}$、$\Delta E_{\mathrm{K},t+\Delta t}$、$\Delta E_{\mathrm{P},t+\Delta t}$分别是从 t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻（即从第 n 步到第 n+1 步）的系统的总能量、动能增量以及势能增量，上式表明该方法的建立前提是保证体系的能量增量小于等于 0，并且满足体系的动量增量为 0。

以上述能量方程为准则，Simo 等人建立了一个新的运动平衡方程，其表达式为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+\alpha}+\mathbf{R}_{n+\alpha}=0 \tag{1-4}$$

式（1-4）中的α表征从第 n 步到第 n+1 步之间的某个位置时的构形，需要注意的是，只有当α=1/2 时，才能保证动量也守恒，因此在α=1/2 意思是指两个积分步中间位置时的单元状态。其中$\mathbf{R}_{n+\alpha}$为等效恢复力，由于该运动方程是基于能量平衡建立的，故恢复力的计算也跟能量有关，如下式

$$\mathbf{R}_{n+1/2}=\frac{\partial E_{\mathrm{P},t+\Delta t}}{\partial \mathbf{U}_{t+\Delta t}} \tag{1-5}$$

实际上只要积分方法的等效恢复力能满足上式，那么该方法实际上就是能量守恒的。

从形式上看，Simo 能量法建立的仍然是基于力的运动平衡方程，并且能够保证能量平衡，进而可以保证算法的稳定性。值得注意的是，Simo 能量法是基于平均加速度方法提出，因此，当应用到线性的结构体系中时，Simo 能量法实际上可以转化为平均加速度方法。从 Simo 能量法的平衡方程可以看出，这是一个以$\mathbf{U}_{t+\Delta t}$为未知量的非线性方程，求解时需要迭代，因此是一种隐式积分方法。

Simo 能量法的主要部分是确定等效恢复力，因此有很多学者针对这部分恢复力提出了一些计算方法。尽管从式（1-5）中可以看出，等效恢复力可以通过能量来得到，但是在进行数值分析时，通过能量来计算等效恢复力是很困难的，因此，对于不同的单元，或者不同的材料，学者们都提出了对应的能量守恒积分方法。Simo 等人提出的是对隐式中点法进行修正，采取平均应变来计算等效恢复力，这个在文献[24]中已有说明，可以看出，并没有通过能量来计算，式（1-5）的计算方法实际上是对能量平衡方程的一种强制条件，并不一定要求用其进行求解。

需要提出的是，在文献[23]中，李妍采用了式（1-4）的形式，但是对于等效恢复力的计算则回归到能量的层次，采用

$$\mathbf{R}_{n+1/2}=\frac{\Delta E_{\mathrm{P},t+\Delta t}}{\Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{T}\mathbf{R}(\frac{\mathbf{U}_{i+1}+\mathbf{U}_{i}}{2})}\mathbf{R}(\frac{\mathbf{U}_{i+1}+\mathbf{U}_{i}}{2}) \tag{1-6}$$

对单自由度体系可简化成

$$\mathbf{R}_{n+1/2}=\frac{\Delta E_{\mathrm{P},t+\Delta t}}{\Delta U_{t+\Delta t}} \tag{1-7}$$

这样的好处在于完全实现了式（1-3）中的能量准则，也就是说体系的能量完全守恒。李妍利用这一理论，对双线性结构进行了非线性分析，结果证明该方法具有可行性。对等效恢复力这样的处理方法，在能量守恒的意义的实现上表现的非常明确，但是在实际的数值分析中，需要对结构的材料由很明确的表达形式，并能够将体系的势能通过计算表达出来，从而得到等效恢复力，这一点对于越来越复杂的结构和材料本构，应用比较困难。但是，李妍将这种能量守恒积分方法应用到了子结构试验中，通过试验来实现结构体系的能量计算，从而发挥出能量守恒积分方法对非线性结构动力分析的优势。

另外，在文献[23]中，李妍从理论上分析了 Simo 能量法与 Hughes 能量法的差异，发现 Simo 能量法在求解运动平衡方程时，只会得到唯一的一个解，而 Hughes 能量法则得到不止一个解，从而导致在迭代过程中出现混乱，而且，Simo 能量法的迭代效率也更高，因此认为 Simo 能量法优于 Hughes 能量法。

实际上，Simo 能量法虽然被视为能量法的核心，但是该方法的提出也只是基于一种超弹性材料，并不是广泛应用于所有的单元或者材料中，所以有各国的学者将这种思想发展到梁单元、壳单元以及杆单元中，提出了各自的能量守恒积分方法，这一点前面已经有所描述。

由于各种能量法都只是局限于某些特定的材料或者单元，因此，在应用到其他结构体系中会出现发散的结果。M.A.Crisfield 通过单摆自由振动的分析，认为 Simo 等人的能量法在计算时会产生一种伪应变，从而也可能导致计算结果的发散，因此提出考虑梯度法的等效恢复力计算方法，这样得到的能量守恒积分方法不仅没有引入任何数值阻尼，而且也能保证计算的稳定性[40,41]。需要指出的是，M.A.Crisfield 提出的能量守恒积分方法是基于杆单元建立的，这也是本课题研究的重点。

1.4 本文主要内容

从国内外的研究现状来看，各国学者已经在能量守恒积分方法方面取得了不少的理论成果，但是这些方法的实际应用还不多。起初的能量守恒积分方法还只是应用在一些简单的机构，并没有应用在结构工程领域，这实际上大大忽略了这类方法的实用价值。针对这一点，本课题对下面几部分进行了研究。

因为本课题的研究对象是大跨空间结构，因此选取依赖与杆单元的 Crisfield 能量守恒积分方法为基本理论。本文的第一部分工作首先对 M.A.Crisfield 提出的能量守恒积分进行一个简单的介绍。由于这个方法是基于 Simo 能量法提出的，两种方法的差别在于等效恢复力的计算方法。在介绍理论的过程中，先介绍的是 Simo 能量法，然后通过引进一个应变修正系数，变成 Crisfield 能量法。然后从能量的角度，推导能量守恒积分方法的能量平衡特性，并且建立了平均加速度方法应用到杆系单元的平衡方程形式，然后推导平均加速度方法分析桁架单元时的能量变化。

为了将能量守恒积分方法应用到实际工程中，借助 OpenSees 这一开源的非线性有限元分析软件，将能量守恒积分方法加入到 OpenSees 中。OpenSees 是由国外联合开发的主要用于结构工程中的地震反应模拟的一个开放的程序软件体系。由于 OpenSees 的开源特性，用户可以通过对其代码的了解，根据自己的需要在其中添加模块，从而使 OpenSees 能够进行期望的分析。本文的第二部分先对 OpenSees 这一基础软件进行了概述，然后以理论的形式，探索有限元动力分析过程与 OpenSees 的代码之间的关系，理清 OpenSees 的动力分析框架。接着根据能量守恒积分方法的流程图，尝试在 OpenSees 中加入新的模块，这些模块需要与 OpenSees 原本的分析过程一致，从而能够直接通过 OpenSees 的主程序来调用新加入的能量守恒积分模块进行结构动力分析。最后通过一个单摆算例来验证程序是否正确。

本文的第三部分工作主要集中在能量守恒积分方法的应用上，希望将添加的能量积分模块用到实际工程结构有限元分析中，分别对二维桁架、三维网架的自由振动和大震作用下的动力反应进行求解，并且将这种能量守恒积分方法与 OpenSees 自带的平均加速度方法以及另一种方法的计算结果进行对比分析，通过在不同结构类型、不同结构加载工况以及不同的积分步长，从多方面来了解能量守恒积分方法的应用范围以及其与别的积分方法，尤其是平均加速度方法在精度和稳定性方面的差别。

本文的第四部分则主要是以能量守恒积分方法为标准，对平均加速度方法在考虑几何非线性、材料非线性以及弹性屈曲力时的影响参数分析，从而对平均加速度方法对杆系结构进行非线性动力分析时的应用提出了一些建议，包括平均加速度方法的稳定条件、误差分析等，建议在非线性分析时采用能量守恒积分方法。

第二章 能量守恒积分方法

2.1 引言

随着非线性动力分析求解时的发散现象逐渐被关注，寻求一种能够被广泛应用到任意线性和非线性体系动力分析中的逐步积分方法成为各国学者研究的重点。在上一章绪论中已经简单介绍了 Simo 能量法和 Hughes 能量法的基本原理：通过对体系的运动平衡方程进行修正，使体系在动力分析过程中达到能量平衡的要求。不过在修正的过程中，两种方法采用的方法并不相同。Hughes 能量法引入的能量约束项虽然保证了能量平衡，但是这个方法已经被证明会存在多解的问题，因而导致迭代的结果会很不合理，而 Simo 能量法在求解运动方程时得到的是唯一解，性能更优于 Hughes 能量法。因此，本章主要就 Simo 能量法和由 Crisfield 改进之后的能量守恒积分方法来介绍能量守恒积分方法在桁架单元中的应用，并且通过能量准则来分析对比能量守恒逐步积分方法和平均加速度方法的数值稳定性特性。

2.2 能量守恒积分方法简介

下图为一桁架单元在从第 n 步（t 时刻）到第 n+1 步（$t+\Delta t$ 时刻）的变化过程，其中 1-2 为第 n 步时的单元，1’-2’为第 n+1 步时的单元，1_m-2_m 为两积分步中点构形。Δd 为单元节点位移向量，e 为每个积分步时的单元方向向量。

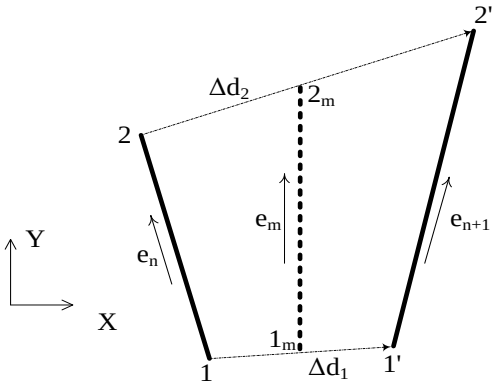


图 2-1 桁架单元

2.2.1 平均加速度方法（AAM）

平均加速度方法作为最常用的隐式积分方法，是 Newmark-β 法其中的一种，

采用位移$\mathbf{U}(t)$作为驱动变量，方法中的γ=0.5，β=0.25，由此得到每一步的速度和加速度：

$$\mathbf{v}_{n+1}=\frac{2}{\Delta t}(\mathbf{d}_{n+1}-\mathbf{d}_n)-\mathbf{v}_n=\frac{2}{\Delta t}\Delta\mathbf{d}-\mathbf{v}_n \tag{2-1}$$

$$\mathbf{a}_{n+1}=\frac{2}{\Delta t}(\mathbf{v}_{n+1}-\mathbf{v}_n)-\mathbf{a}_n=\frac{2}{\Delta t}\Delta\mathbf{v}-\mathbf{a}_n \tag{2-2}$$

在不考虑阻尼的情况下，第 n+1 步的平衡方程为

$$\mathbf{g}_{n+1}=\mathbf{q}_{i,n+1}+\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1}-\mathbf{q}_{e,n+1}=0 \tag{2-3}$$

其中$\mathbf{q}_i$为内力，$\mathbf{M}$为质量矩阵，$\mathbf{q}_e$为外部荷载，平衡方程（2-3）式可以通过 Newton-Raphson 方法求解。

由于本文研究对象为空间结构，其主要单元为两节点的桁架单元，如图 2-1，杆件从 1-2 的位置运动到 1’-2’的位置，重新列平衡方程（2-3），得到

$$\mathbf{g}_{n+1}=N_{n+1}\begin{bmatrix}-\mathbf{e}_{n+1}\\ \mathbf{e}_{n+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}m_1\mathbf{a}_{1,n+1}\\ m_2\mathbf{a}_{2,n+1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{q}_{1,n+1}\\ \mathbf{q}_{2,n+1}\end{bmatrix}=0 \tag{2-4}$$

其中N_{n+1}为第n+1步的桁架单元轴力，$\mathbf{e}_{n+1}$是该时刻的单元单位方向向量。方程（2-4）即为平均加速度方法求解桁架单元的动力方程。

2.2.2 能量守恒积分方法（ECM）

在本研究之前，能量守恒积分方法已经得到一些国内学者的关注[42]，并对其作了一些应用方面的研究。以下仅对能量方法的理论作简要介绍。

在介绍能量守恒积分方法之前，必须指出的是，能量守恒积分方法是一种不同于以往传统的积分方法。一般知道，在进行有限元动力分析时，主要是将连续的结构体划分为有限个在结点处相连接的小单元，使得原本在质量和几何上都连续的无限自由度体系变为有限单元集合体，这是空间求解域上的离散，这样得到平衡方程式（1-1）中的结构质量、阻尼和刚度矩阵，空间离散之后，此时结构运动的平衡方程成为一个微分的形式，各单元节点处的速度$\dot{\mathbf{U}}(t)$和加速度$\ddot{\mathbf{U}}(t)$通过对位移$\mathbf{U}(t)$进行微分得到，如平均加速度方法，则是对这样的微分方程进行时间求解域上的离散，通过对速度和加速度的一些假定，使得速度$\dot{\mathbf{U}}(t)$和加速度$\ddot{\mathbf{U}}(t)$成为差分的形式，从而得到平衡方程（1-1）。

上述过程表明，对于一个有限元动力问题，可以分为空间域离散和时间域的

离散两部分，通常来说，一种新的单元对应于空间域离散，而一种新的积分方法则应用于时间域的离散。前面已经讲过，能量守恒逐步积分方法考虑了中点构形，这种假定，需要结合空间域的结构模型信息，也就是说，能量守恒积分方法不仅仅参与了时间域上的离散，也联系了空间域的部分，这两部分在这种能量法实现的过程中并不是独立开来，而是需要互相联系的。

Simo 等提出的基于两个积分时刻的中点来建立平衡方程，这不同于平均加速度方法基于积分时刻的平衡方程，也就是空间域与时间域之间的结合。当然，该方法在时域部分仍然基于平均加速度方法对于速度和加速度的假定。

基于中点构形的假定，在无阻尼情况下，平衡方程改写为：

$$\mathbf{g}_{\boldsymbol{m}} = \mathbf{q}_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{m}} + \mathbf{M}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}} - \mathbf{q}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{m}} = 0 \tag{2-5}$$

对于具体的桁架单元，（2-5）式写为

$$\mathbf{g}_{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{m}} \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_{\boldsymbol{m}} \\ \mathbf{e}_{\boldsymbol{m}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1 \mathbf{a}_{1,\boldsymbol{m}} \\ \boldsymbol{m}_2 \mathbf{a}_{2,\boldsymbol{m}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1,\boldsymbol{m}} \\ \mathbf{q}_{2,\boldsymbol{m}} \end{bmatrix} = 0 \tag{2-6}$$

其中 $\mathbf{a}_{\boldsymbol{m}} = \dfrac{\mathbf{a}_{\boldsymbol{n}} + \mathbf{a}_{\boldsymbol{n}+1}}{2}$， $\boldsymbol{N}_m = \dfrac{\boldsymbol{N}_n + \boldsymbol{N}_{n+1}}{2}$， $\mathbf{q}_m = \dfrac{\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n+1}}{2}$，而 $\mathbf{e}_{\boldsymbol{m}}$ 为两个时间步中点位置 1_m-2_m（图 2-1）单元所对应的单位方向向量，通过下式计算

$$\mathbf{e}_m = (\mathbf{X}_{21,n} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{d}_{21}) / l_m \tag{2-7}$$

式（2-7）中的 l_m 为中点位置 1_m-2_m 杆件长度，表达式为

$$l_m = \left\| \mathbf{X}_{21,n} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{d}_{21} \right\| \tag{2-8}$$

式中 $\mathbf{X}_{21,n}$ 表征第 n 步杆件的位置， $\mathbf{X}_{21,n} = \mathbf{X}_{2,n} - \mathbf{X}_{1,n}$， $\Delta\mathbf{d}_{21}$ 为 2 节点的位移向量差，并且 $\Delta\mathbf{d}_{21} = \Delta\mathbf{d}_2 - \Delta\mathbf{d}_1$。

由于 $\mathbf{a}_m = \dfrac{\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}}{2} = \dfrac{1}{\Delta t}\Delta\mathbf{v}$，将其带入式（2-6）中，可以得到

$$\mathbf{g}_m = \boldsymbol{N}_m \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_m \\ \mathbf{e}_m \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} m_1 \Delta\mathbf{v}_1 \\ m_2 \Delta\mathbf{v}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1,m} \\ \mathbf{q}_{2,m} \end{bmatrix} = 0 \tag{2-9}$$

由于 Simo 能量积分方法对 N_m 的定义是直接采用两个时间点的中间值，这造成了很大的伪应变，导致这种积分方法的应用结果并不理想。M.A.Crisfield[40]对 N_m 进行了修正，改为

$$\boldsymbol{N}_m = \beta \frac{\boldsymbol{N}_n + \boldsymbol{N}_{n+1}}{2} \tag{2-10}$$

其中$\beta = \frac{2l_m}{l_n + l_{n+1}}$，$l_n$和$l_{n+1}$是第 n 步及第 n+1 步时刻的杆件单元的长度，可以由杆件节点坐标求出。可以看出，Simo 能量法实际上时 M.A.Crisfield 方法的特例，方程中的$\beta = 1$。值得注意的是，β在整个动力分析过程中，是不断变化的，并且每个杆件单元对应的β值都不同。

2.3 积分方法的能量

2.3.1 积分方法稳定性判断

传统的隐式积分方法一般是基于线弹性体系来建立的，这样的线性问题可以通过谱半径$\rho \le 1$来判断逐步积分方法的稳定性[43]。比如常用的 Newmark-β法，通过控制γ和β来影响积分方法的稳定性和精度，当γ=0.5，β=0.25时，通常称为平均加速度方法，该方法对于线弹性体系为无条件稳定。但是对于非线性体系，这个判断标准不再适用。由于在求解连续时间上的动力方程时，通过积分方法进行了离散，这种离散的过程，并不能保证是否对体系的能量产生了影响，因此可以引入能量准则来作为判断逐步积分方法的数值稳定性的标准，就是在线性或者非线性体系中，逐步积分方法在其离散系统中，以系统的数值解表达出的某种能量形式的值在整个积分计算过程中不会由于逐步积分方法的算法假设和离散而过多的扩大或缩小，即有界，则称该积分方法是稳定的。通过这个准则，推导平均加速度方法和能量守恒积分方法对于桁架单元的能量增量。

2.3.2 平均加速度方法

根据图 2-1 中桁架单元的运动状态，考虑几何非线性，那么在不考虑阻尼作用的自由振动时，平均加速度方法的桁架单元运动平衡方程可以表达为为：

$$\boldsymbol{N}_{n+1}\mathbf{e}_{n+1} + m\mathbf{a}_{n+1} = 0 \qquad \text{(第 } n\text{+1 步)} \tag{2-11}$$

$$\boldsymbol{N}_n\mathbf{e}_n + m\mathbf{a}_n = 0 \qquad \text{(第 } n \text{ 步)} \tag{2-12}$$

其中

$$\mathbf{e}_{n+1} = (\mathbf{X} + \Delta\mathbf{d}) / l_{n+1} \tag{2-13}$$

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{X} / l_n \tag{2-14}$$

当积分从第 n 步进行到第 n+1 步的时候，两步之间的能量增量有两部分，分别为动能增量和势能增量。

动能增量通过两个积分步的动能之差来求解，表达式如下：

$$\Delta \boldsymbol{K} = \frac{1}{2} m\left(\mathbf{v}_{n+1}^T \mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n^T \mathbf{v}_n\right) = m\mathbf{v}_{av}^T \Delta \mathbf{v} = \frac{1}{\Delta t} m \Delta \mathbf{v}^T \Delta \mathbf{d} \tag{2-15}$$

势能增量则通过两个积分步的应变能来计算，其计算式如下：

$$\Delta \varphi = \frac{l_0}{2EA}\left(\boldsymbol{N}_{n+1}^2 - \boldsymbol{N}_n^2\right) = \frac{l_0}{EA} \boldsymbol{N}_{av} \Delta \boldsymbol{N} \tag{2-16}$$

其中

$$\Delta \boldsymbol{N} = \frac{EA}{l_0}\left(l_{n+1} - l_n\right) = \frac{EA}{l_0} \frac{(l_{n+1}^2 - l_n^2)}{\left(l_{n+1} + l_n\right)} \tag{2-17}$$

此时

$$l_{n+1}^2 - l_n^2 = 2\mathbf{X}^T \Delta \mathbf{d} + \Delta \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{d} = (2\mathbf{X}^T + \Delta \mathbf{d}^T)\Delta \mathbf{d} \tag{2-18}$$

将式（2-17）与式（2-18）代入（2-16）得到势能增量表达式为

$$\Delta \varphi = \frac{\boldsymbol{N}_{av}}{l_{n+1} + l_n}(2\mathbf{X}^T + \Delta \mathbf{d}^T)\Delta \mathbf{d} \tag{2-19}$$

由式（2-15）和式（2-19）可以得出平均加速度方法从第 n 步到第 n+1 步积分造成的能量增量，为

$$\Delta \Phi = \Delta \boldsymbol{K} + \Delta \varphi = \frac{N_{av}}{l_{n+1} + l_n}\left(2\mathbf{X}^T + \Delta \mathbf{d}^T\right)\Delta \mathbf{d} + \frac{1}{\Delta t} m \Delta \mathbf{v}^T \Delta \mathbf{d} \tag{2-20}$$

上式左右两端乘以 2 之后得到

$$2\Delta \Phi = 2\Delta \boldsymbol{K} + 2\Delta \varphi = \frac{\boldsymbol{N}_n + \boldsymbol{N}_{n+1}}{l_{n+1} + l_n}\left(2\mathbf{X}^T + \Delta \mathbf{d}^T\right)\Delta \mathbf{d} + \frac{2}{\Delta t} m \Delta \mathbf{v}^T \Delta \mathbf{d} \tag{2-21}$$

将（2-11）（2-12）式转置后都乘以 $\Delta \mathbf{d}$，可以得到

$$\boldsymbol{N}_{n+1} \mathbf{e}_{n+1}^T \Delta \mathbf{d} + m\mathbf{a}_{n+1}^T \Delta \mathbf{d} = 0 \tag{2-22}$$

$$\boldsymbol{N}_n \mathbf{e}_n^T \Delta \mathbf{d} + m\mathbf{a}_n^T \Delta \mathbf{d} = 0 \tag{2-23}$$

将式（2-21）－（2-22）－（2-23）得到体系能量增量的另一个表达形式：

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \frac{\boldsymbol{N}_n+\boldsymbol{N}_{n+1}}{l_{n+1}+l_n}\left(2\mathbf{X}^T+\Delta\mathbf{d}^T\right)\Delta\mathbf{d}+\frac{2}{\Delta t}m\Delta\mathbf{v}^T\Delta\mathbf{d}\\ &\quad -\boldsymbol{N}_{n+1}\mathbf{e}_{n+1}^T\Delta\mathbf{d}-m\mathbf{a}_{n+1}^T\Delta\mathbf{d}-\boldsymbol{N}_n\mathbf{e}_n^T\Delta\mathbf{d}-m\mathbf{a}_n^T\Delta\mathbf{d}\\ &= \frac{\boldsymbol{N}_n+\boldsymbol{N}_{n+1}}{l_{n+1}+l_n}\left(2\mathbf{X}^T+\Delta\mathbf{d}^T\right)\Delta\mathbf{d}-\left(\boldsymbol{N}_{n+1}\mathbf{e}_{n+1}^T+\boldsymbol{N}_n\mathbf{e}_n^T\right)\Delta\mathbf{d}\\ &\quad +(\frac{2}{\Delta t}m\Delta\mathbf{v}^T-m\mathbf{a}_{n+1}^T-m\mathbf{a}_n^T)\Delta\mathbf{d}\end{aligned} \tag{2-24}$$

其中

$$\frac{1}{\Delta t}m\Delta\mathbf{v}^T-m\mathbf{a}_{n+1}^T-m\mathbf{a}_n^T=m\left(\frac{2}{\Delta t}\Delta\mathbf{v}^T-\mathbf{a}_{n+1}^T-\mathbf{a}_n^T\right) \tag{2-25}$$

由平均加速度法的假定

$$\mathbf{a}_{n+1}=\frac{2}{\Delta t}\left(\mathbf{v}_{n+1}-\mathbf{v}_n\right)-\mathbf{a}_n=\frac{2}{\Delta t}\Delta\mathbf{v}-\mathbf{a}_n \tag{2-26}$$

因此（2-25）式结果为 0。

那么

$$2\Delta\Phi=\frac{\boldsymbol{N}_n+\boldsymbol{N}_{n+1}}{l_{n+1}+l_n}\left(2\mathbf{X}^T+\Delta\mathbf{d}^T\right)\Delta\mathbf{d}-\left(\boldsymbol{N}_{n+1}\mathbf{e}_{n+1}^T+\boldsymbol{N}_n\mathbf{e}_n^T\right)\Delta\mathbf{d} \tag{2-27}$$

又因为

$$2\mathbf{X}^T+\Delta\mathbf{d}^T=\mathbf{e}_{n+1}^T l_{n+1}+\mathbf{e}_n^T l_n \tag{2-28}$$

带入上式，得到

$$2\Delta\Phi=\frac{\boldsymbol{N}_n+\boldsymbol{N}_{n+1}}{l_{n+1}+l_n}\left(\mathbf{e}_{n+1}^T l_{n+1}+\mathbf{e}_n^T l_n\right)\Delta\mathbf{d}-\left(\boldsymbol{N}_{n+1}\mathbf{e}_{n+1}^T+\boldsymbol{N}_n\mathbf{e}_n^T\right)\Delta\mathbf{d} \tag{2-29}$$

展开，得到

$$\begin{aligned}2\Delta\Phi &= \frac{1}{l_{n+1}+l_n}(\boldsymbol{N}_n\mathbf{e}_{n+1}^T l_{n+1}+\boldsymbol{N}_{n+1}\mathbf{e}_n^T l_n-\boldsymbol{N}_n\mathbf{e}_n^T l_{n+1}-\boldsymbol{N}_{n+1}\mathbf{e}_{n+1}^T l_n)\Delta\mathbf{d}\\ &= \frac{1}{l_{n+1}+l_n}[\left(\boldsymbol{N}_{n+1}\mathbf{e}_{n+1}^T-\boldsymbol{N}_n\mathbf{e}_n^T\right)\Delta l]\Delta\mathbf{d}\\ &\quad -[(\boldsymbol{N}_{n+1}-\boldsymbol{N}_n)(\mathbf{e}_{n+1}^T l_{n+1}-\mathbf{e}_n^T l_n)]\Delta\mathbf{d}\end{aligned} \tag{2-30}$$

其中

$$\boldsymbol{N}_{n+1}=\frac{EA}{l_0}\left(l_{n+1}-l_0\right) \tag{2-31}$$

$$\boldsymbol{N}_{n}=\frac{EA}{l_0}\left(l_{n}-l_0\right) \tag{2-32}$$

$$\mathbf{e}_{n+1}^T l_{n+1}-\mathbf{e}_n^T l_n=\mathbf{X}^T+\Delta\mathbf{d}^T-\mathbf{X}^T=\Delta\mathbf{d}^T \tag{2-33}$$

$$\boldsymbol{N}_{n+1}-\boldsymbol{N}_n=\frac{EA}{l_0}\left(l_{n+1}-l_n\right)=\frac{EA}{l_0}\Delta l \tag{2-34}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{n+1}\mathbf{e}_{n+1}^T&=\frac{\boldsymbol{N}_{n+1}}{l_{n+1}}\left(\mathbf{X}^T+\Delta\mathbf{d}^T\right)=\frac{EA}{l_0 l_{n+1}}\left(l_{n+1}-l_0\right)\left(\mathbf{X}^T+\Delta\mathbf{d}^T\right)\\&=(\frac{EA}{l_0}-\frac{EA}{l_{n+1}})\left(\mathbf{X}^T+\Delta\mathbf{d}^T\right)\end{aligned} \tag{2-35}$$

$$\boldsymbol{N}_n\mathbf{e}_n^T=(\frac{EA}{l_0}-\frac{EA}{l_n})\mathbf{X}^T \tag{2-36}$$

由以上得出：

$$\begin{aligned}2\Delta\Phi&=\frac{\Delta l}{l_{n+1}+l_n}[\left(\frac{EA}{l_0}-\frac{EA}{l_{n+1}}\right)\left(\mathbf{X}^T+\Delta\mathbf{d}^T\right)-\left(\frac{EA}{l_0}-\frac{EA}{l_n}\right)\mathbf{X}^T-\frac{EA}{l_0}\Delta\mathbf{d}^T]\Delta\mathbf{d}\\&=\frac{\Delta l}{l_{n+1}+l_n}[\frac{EA}{l_n}\mathbf{X}^T-\frac{EA}{l_{n+1}}(\mathbf{X}^T+\Delta\mathbf{d}^T)]\Delta\mathbf{d}\\&=\frac{EA\Delta l}{l_{n+1}+l_n}(\mathbf{e}_n^T-\mathbf{e}_{n+1}^T)\Delta\mathbf{d}\end{aligned} \tag{2-37}$$

则第 n 步到第 n+1 步的由平均加速度方法计算得到的能量增量为

$$\Delta\Phi=\frac{EA\Delta\boldsymbol{l}}{2(l_{n+1}+l_n)}(\mathbf{e}_n^T-\mathbf{e}_{n+1}^T)\Delta\mathbf{d} \tag{2-38}$$

从而可以知道平均加速度方法在积分过程中总能量增量为

$$\Delta\boldsymbol{E}=\sum\frac{EA(l_{n+1}-l_n)}{2(l_{n+1}+l_n)}(\mathbf{e}_n^T-\mathbf{e}_{n+1}^T)\Delta\mathbf{d}_n\neq 0 \tag{2-39}$$

从上述推导的结果可以看出，对于无阻尼自由振动的桁架单元体系，考虑了几何非线性的动力分析过程中，应用平均加速度方法来离散运动过程，会导致体系在积分过程中能量并不守恒，总能量有一个增量 $\Delta\boldsymbol{E}$，虽然无法判断这一增量的

正负，但是从能量的角度来看，这一增量会成为平均加速度方法在非线性动力分析中的不稳定因素，这一点将在后续章节进行讨论。

2.3.3 能量守恒积分方法

同样用能量守恒积分方法来进行考虑几何非线性的桁架单元动力分析，根据式（2-9）的运动平衡方程，不考虑阻尼，体系在外力作用下发生受迫振动，计算第 n 步到第 n+1 步的能量增量。

能量守恒积分方法计算的动能增量与平均加速度方法一致，见式（2-15）.

外力对体系的做功可通过下式计算：

$$\Delta \boldsymbol{P} = -\mathbf{q}_e^T \Delta \mathbf{d} \tag{2-40}$$

内能增量的计算方法仍然与式（2-16）相同，但是由于能量守恒积分方法采用了中点构形的假定，因此经过化简之后得到的势能增量表达式差别比较大。

此时

$$l_{n+1}^2 - l_n^2 = 2\mathbf{X}^T \Delta \mathbf{d} + \Delta \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{d} = 2 l_m \mathbf{e}_m^T \Delta \mathbf{d} \tag{2-41}$$

根据前面定义的 $\beta = \dfrac{2l_m}{l_n + l_{n+1}}$，可以得到

$$\Delta \varphi = \beta \boldsymbol{N}_{av} \mathbf{e}_m^T \Delta \mathbf{d} \tag{2-42}$$

那么第 n 步到第 n+1 步的能量增量为动能与势能增量之和，可以得到下式

$$\begin{aligned}
\Delta \Phi &= \Delta \boldsymbol{K} + \Delta \varphi + \Delta \boldsymbol{P} = \frac{1}{\Delta t} m \Delta \mathbf{v}^T \Delta \mathbf{d} + \beta \boldsymbol{N}_{av} \mathbf{e}_m^T \Delta \mathbf{d} - \mathbf{q}_e^T \Delta \mathbf{d} \\
&= \left(\frac{1}{\Delta t} m \Delta \mathbf{v}^T + \beta \boldsymbol{N}_{av} \mathbf{e}_m^T - \mathbf{q}_e^T \right) \Delta \mathbf{d} \\
&= (\frac{1}{\Delta t} m \Delta \mathbf{v} + \beta \boldsymbol{N}_{av} \mathbf{e}_m - \mathbf{q}_e)^T \Delta \mathbf{d} \\
&= \mathbf{g}_m^T \Delta \mathbf{d} = 0
\end{aligned} \tag{2-43}$$

从上式的计算中可以得到每一个积分的能量增量均等于 0，则在整个非线性动力分析过程中，体系总能量增量 $\Delta \boldsymbol{E} = 0$。

2.4 本章小结

本章重点介绍了能量守恒逐步积分方法，并且从理论上将其与平均加速度方法进行比较，推导了两种积分方法的能量增量，主要得到以下结论：

1. 平均加速度方法在考虑几何非线性的情况下，在积分过程中，总能量增量不为0，即能量增量可能为正，也可能为负，这导致了平均加速度方法考虑几何非线性时并不能成为无条件稳定的算法。
2. 能量守恒积分方法基于平均加速度方法，以能量守恒作为准则建立平衡方程，保证了时程分析过程中体系能量不变，从而保证积分过程中不会发散，成为一种无条件稳定的算法。

第三章 能量守恒积分方法在 OpenSees 中的实现

3.1 引言

第 2 章介绍了能量守恒积分方法，得出能量法是一种数值稳定的算法，而平均加速度方法在考虑几何非线性的时候变得不稳定。在土木工程中，空间结构变得越来越复杂，在大震作用下，其动力响应中包含了大位移成分，结构进入几何非线性和弹塑性都比较显著的工作状态。而一般应用的有限元分析软件中，均采用平均加速度方法来分析，出现了计算发散的现象。为解决这个问题，本课题对开源软件 OpenSees 进行二次开发，在其中加入了能量守恒积分方法。

3.2 OpenSees 软件框架

3.2.1 OpenSees 简介

OpenSees 作为一个非线性有限元分析软件，其主要的模块与其他有限元分析软件类似，包括建立模型模块（ModelBuilder）、分析模块（Analysis）以及记录输出模块（Recoder）。其中建模模块（ModelBuilder）主要通过建立模型的节点（Node）、单元（Element）以及材料（Material）等结构信息，并将这些结构信息保存到 OpenSees 中的主模块（Domain）中，而分析模块（Analysis）则通过定义的积分方法将结构的运动从 t 时刻推进到 $t+\Delta t$ 时刻，并将这些信息传递给主模块（Domain）中，记录输出模块（Recoder）记录每一个积分步的结构信息，并且对用户定义的结构模型参数进行监测。从图 3-1 中可以看出，主模块（Domain）是联系另外三部分模块的中间载体，它将 t 时刻和 $t+\Delta t$ 时刻的结构信息保存起来，并在分析模块（Analysis）和记录输出模块（Recoder）需要调用这些信息的时候，将这些结构状态信息传递给对应的模块。

由于 OpenSees 采用了面向对象的编程结构，按照图 3-1 的分区，将整个有限元分析需要用到的各部分信息分散封装到对应的模块或对象之中，而信息之间的传递则通过 C++语言特有的类与类之间的继承关系来实现。以单元为对象来说，单元的基本属性以及对单元属性的操作（例如组装单元刚度矩阵和单元部分的不平衡力）放在单元的基本模块中，而对各种不同的单元的需要进行的操作则通过派生等方法来完成。这样的结果就将 OpenSees 的代码按照图 3-1 进行了划分，使各部分需要执行的分工明确。同时，二次开发的工作就容易展开，这是因为可以通过类与类之间的继承和访问来得到各部分的信息，而不需要再次进行重复的代

码工作，而且使得 OpenSees 具有更加层次分明的代码结构。

正是由于 OpenSees 这种面向对象编程的模式，国内外的用户都可以在其中添加自己需要的对象，而且是在不改变 OpenSees 原本的架构基础的前提之下。本课题也是因为这个原因，选取 OpenSees 作为能量守恒积分方法的实现平台。

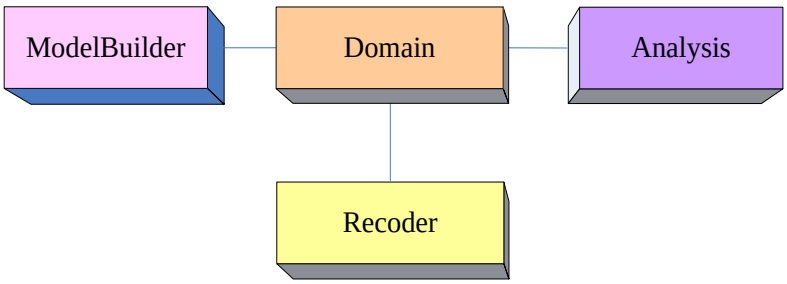


图 3-1 OpenSees 模块示意图

3.2.2 OpenSees 动力分析过程

前文已经讲到，与平均加速度方法不同，能量守恒积分方法是以能量平衡为前提建立的平衡方程，并且是以中点构形为方程建立点，最后导致的结果就是使得能量守恒积分方法在有限元动力分析过程中，不仅仅以积分方法的形式出现，其方法的实现还需要有限元部分的空间离散信息。当然尽管能量守恒积分方法不同于传统的积分方法，但是单纯从有限元动力分析的过程来说，不管任何方法，不管其有限元部分如何离散，其动力分析过程还是按照固定的过程进行，这一点对于 OpenSees 这一个有限元分析软件也是如此。

但是对于 OpenSees 来说，采用了面向对象的 C++编程语言开发，其在实现动力分析过程的时候，以基本理论为基础，通过一步步的累加组装，然后求解计算，这一过程虽然基本类似，但是其中的各个部分如何与能量守恒积分方法对应，从而在利用代码实现的时候能够对号入座，还是需要通过下面的过程来阐述。

对于一个以 **U** 为解的非线性方程可以写成下面的形式：

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

其中 $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ 是一个非线性函数[44]，也就是能量守恒积分方法平衡方程式（2-5）中的 $\mathbf{g}_m$。在有限元分析中，对于动力问题，其更通用的形式是寻求一个由 $(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \ddot{\mathbf{U}})$ 组成的解来满足下式所定义的残余力：

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathop{\mathbf{A}}_{n=1}^{nodes} (\mathbf{P}_n(t) - \mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{U}}_n) - \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{elements} (\mathbf{F}_{Ie}(\ddot{\mathbf{U}}_e) + \mathbf{F}_{Re}(\dot{\mathbf{U}}_e, \mathbf{U}_e) - \mathbf{P}_e(t)) \qquad (3\text{-}2)$$

方程（3-2）实际上将残余力分解成两个部分，分别为节点残余力与单元残余

力。在求解分析上述非线性有限元方程的时候，最常用的方法是采用增量方法。在增量方法中，每一个方程的解都对应于连续的时间步。在每一个时间步 t，方程的解都是以位移增量 $\Delta\mathbf{U}_t$ 的形式出现。在 $\mathbf{U}_t$ 满足 $\mathbf{R}(\mathbf{U}_t)=0$ 的前提下，寻求 $\Delta\mathbf{U}_t$ 使得 $\mathbf{R}(\mathbf{U}_{t+\Delta t})=0$，其中 $\mathbf{U}_{t+\Delta t}=\mathbf{U}_t+\Delta\mathbf{U}_t$。

在动力分析中，很多隐式积分方法都是将速度和加速度与 $\Delta\mathbf{U}$ 关联起来。在积分方法中，用 $\Delta\mathbf{U}_t$ 和已经执行的时间步的反应量来表示速度和加速度，用两个函数 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 来表示。

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}=\mathbf{I}_1(\Delta\mathbf{U}_t,\mathbf{U}_t,\dot{\mathbf{U}}_t,\ddot{\mathbf{U}}_t,\mathbf{U}_{t-\Delta t},\dot{\mathbf{U}}_{t-\Delta t},\ddot{\mathbf{U}}_{t-\Delta t}\ldots\ldots,) \tag{3-3}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}=\mathbf{I}_2(\Delta\mathbf{U}_t,\mathbf{U}_t,\dot{\mathbf{U}}_t,\ddot{\mathbf{U}}_t,\mathbf{U}_{t-\Delta t},\dot{\mathbf{U}}_{t-\Delta t},\ddot{\mathbf{U}}_{t-\Delta t}\ldots\ldots,) \tag{3-4}$$

为了求解（3-2）式的非线性方程，一般采用迭代过程：先假定一个 $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ 作为 $\mathbf{U}^{(0)}{}_{t+\Delta t}$，然后依次求解一系列的 $\mathbf{U}^{(i)}{}_{t+\Delta t}$，知道满足精度要求，从而得到一个符合要求的 $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$。最常用的牛顿迭代，改进的牛顿迭代等方法，都是基于泰勒展开得到的：

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_{t+\Delta t})=\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(i)}_{t+\Delta t})+\left[\left.\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{U}}\right|_{\mathbf{U}^{(i)}_{t+\Delta t}}\right](\mathbf{U}_{t+\Delta t}-\mathbf{U}^{(i)}_{t+\Delta t}) \tag{3-5}$$

因此，对于非线性方程（3-2）式，可以表示为下面的形式

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\mathbf{U}_{t+\Delta t})=&\underset{n}{\mathbf{A}}(\mathbf{P}_n(t+\Delta t)-\mathbf{M}_n\ddot{\mathbf{U}}^{(i)}_{n_{t+\Delta t}})-\underset{n}{\mathbf{A}}(\mathbf{M}_n\mathbf{I}'_2)(\mathbf{U}_{n_{t+\Delta t}}-\mathbf{U}^{(i)}_{n_{t+\Delta t}})\\&-\underset{e}{\mathbf{A}}(\mathbf{F}_{Ie}(\ddot{\mathbf{U}}^{(i)}_{e_{t+\Delta t}})+\mathbf{F}_{Re}(\dot{\mathbf{U}}^{(i)}_{e_{t+\Delta t}},\mathbf{U}^{(i)}_{e_{t+\Delta t}})-\mathbf{P}_e(t+\Delta t))\\&-\underset{e}{\mathbf{A}}(\mathbf{M}_e\mathbf{I}'_2+\mathbf{C}_e\mathbf{I}'_1+\mathbf{K}_e)(\mathbf{U}_{e_{t+\Delta t}}-\mathbf{U}^{(i)}_{e_{t+\Delta t}})\end{aligned} \tag{3-6}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_e&=\left.\frac{\partial\mathbf{F}_{I_i}}{\partial\ddot{\mathbf{U}}}\right|_{\mathbf{U}^{(i)}_{e_{t+\Delta t}}}\\\mathbf{C}_e&=\left.\frac{\partial\mathbf{F}_{R_i}}{\partial\dot{\mathbf{U}}}\right|_{\mathbf{U}^{(i)}_{e_{t+\Delta t}}}\\\mathbf{K}_e&=\left.\frac{\partial\mathbf{F}_{R_i}}{\partial\mathbf{U}}\right|_{\mathbf{U}^{(i)}_{e_{t+\Delta t}}}\end{aligned} \tag{3-7}$$

$\mathbf{I}'_1$ 和 $\mathbf{I}'_2$ 的值由数值积分方法决定：

$$\mathbf{I}_1' = \frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial \Delta \mathbf{U}}$$
$$\mathbf{I}_2' = \frac{\partial \mathbf{I}_2}{\partial \Delta \mathbf{U}} \tag{3-8}$$

对于（3-6）式的非线性方程，可以简化成下式：

$$\mathbf{K}^* \Delta \mathbf{U}_n^{(i)} = \mathbf{P}^* \tag{3-9}$$

其中

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_n^* + \mathbf{K}_e^* \tag{3-10}$$

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{P}_n^* + \mathbf{P}_e^* \tag{3-11}$$

并且$\mathbf{K}_n^*$和$\mathbf{K}_e^*$分别是节点和单元组装的等效刚度矩阵，$\mathbf{P}_n^*$和$\mathbf{P}_e^*$则分别是节点和单元组装的等效不平衡力，这四项的表达式如下所示

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_n^* &= \underset{n}{\mathbf{A}}(\mathbf{M}_n \mathbf{I}_2') \\
\mathbf{K}_e^* &= \underset{e}{\mathbf{A}}(\mathbf{M}_e \mathbf{I}_2' + \mathbf{C}_e \mathbf{I}_1' + \mathbf{K}_e) \\
\mathbf{P}_n^* &= \underset{n}{\mathbf{A}}(\mathbf{P}_n(t+\Delta t) - \mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{U}}_{n_{t+\Delta t}}^{(i)}) \\
\mathbf{P}_e^* &= \underset{e}{\mathbf{A}}(\mathbf{P}_e(t+\Delta t) - \mathbf{F}_{Ie}(\ddot{\mathbf{U}}_{e_{t+\Delta t}}^{(i)}) - \mathbf{F}_{Re}(\dot{\mathbf{U}}_{e_{t+\Delta t}}^{(i)}, \mathbf{U}_{e_{t+\Delta t}}^{(i)}))
\end{aligned} \tag{3-12}$$

另外，$\Delta \mathbf{U}_n^{(i)}$是每一个迭代步的位移增量，可以通过下式来理解

$$\Delta \mathbf{U}_n^{(i)} = (\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} - \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{(i)}) \tag{3-13}$$

综上所述，在开始迭代时，需要有一个试算的$\mathbf{U}_{t+\Delta t}$、$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$和$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$，一般认为$\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{(0)} = \mathbf{U}_t$，然后通过积分方法确定$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(0)}$和$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{(0)}$。

3.2.3 OpenSees 动力分析代码实现

在 OpenSees 中，通过 Analysis 模块中的 Direct*In*tegra*t*ionAnalysis 来完成上述动力分析过程。

当定义了分析步数和积分步长之后，OpenSees 开始分析，首先形成分析过程中所要用到的变量，第二步将这些变量进行初始化，第三步开始进行积分过程，通过积分算法来定义试算的$\mathbf{U}_{t+\Delta t}$、$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$和$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$，第四步进行最关键的求解积分步过程，也就是求解$\mathbf{K}^* \Delta \mathbf{U}_n^{(i)} = \mathbf{P}^*$方程，最后将求出的$\Delta \mathbf{U}_t$，作为位移增量，更新

下一步的动力反应。

```
DirectIntegrationAnalysis:: analyze (int numSteps, double dT) {
        1. Domain *the_Domain = this->getDomainPtr();
           for (int i=0; i<numSteps; i++)
       {
        2. the_Domain->hasDomainChanged() ;
        3. theIntegrator->newStep(dT);
        4. theAlgorithm->solveCurrentStep();
        5. theIntegrator->commit();
       }
  }
```

图 3-2 DirectIntegrationAnalysis 类的部分代码

在进行上述第四步求解过程时，主要是求解 $\mathbf{K}^{*}\Delta\mathbf{U}_{n}^{(i)}=\mathbf{P}^{*}$，这一部分通过 solveCurrentStep 来完成。

先组装等效刚度矩阵 $\mathbf{K}^{*}$ 和等效残余力 $\mathbf{P}^{*}$，然后通过线性求解器求出位移增量 $\Delta\mathbf{U}_{n}^{(i)}$，积分器利用上一步计算的到的增量，更新下一步的动力反应 $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$、$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ 和 $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$，并且由当前的计算余量判断是否满足用户定义的收敛要求，若没有达到，则继续进行下一步迭代过程。

```
theIntegrator->formUnbalance();
    Do
      {
        theIntegrator->formTangent();
        theSOE->solve();
        theIntegrator->update();
        theIntegrator->formUnbalance();
        theTest->test();
        this->record();
      }
```

图 3-3 solveCurrentStep 的求解过程

3.3 能量法在 OpenSees 中的实现

3.3.1 能量守恒积分方法的等效刚度矩阵

参照上一节中对 OpenSees 动力分析过程的各部分描述，将能量守恒积分方法按这样的划分方式分别求出各部分对应的变量，主要组装$\mathbf{K}^*\Delta\mathbf{U}_n^{(i)}=\mathbf{P}^*$中的几项。

此时仍然认为是无阻尼结构体系，首先写出能量方法的平衡方程

$$\mathbf{g}_m=\mathbf{q}_{i,m}+\mathbf{M}\mathbf{a}_m-\mathbf{q}_{e,m}=0 \tag{3-14}$$

展开得到

$$\mathbf{g}_m=\frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix} m_1\Delta\mathbf{v}_1 \\ m_2\Delta\mathbf{v}_2 \end{bmatrix}+N_m\begin{bmatrix} -\mathbf{e}_m \\ \mathbf{e}_m \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1,m} \\ \mathbf{q}_{2,m} \end{bmatrix}=\mathbf{0} \tag{3-15}$$

对内力微分进行，求出刚度矩阵

$$\delta\mathbf{q}_{i,m}=\delta N_m\begin{bmatrix} -\mathbf{e}_m \\ \mathbf{e}_m \end{bmatrix}+N_m\begin{bmatrix} -\delta\mathbf{e}_m \\ \delta\mathbf{e}_m \end{bmatrix}=\mathbf{K}\delta\mathbf{d}$$

求出的$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{A} \\ -\mathbf{A} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$。

其中

$$\mathbf{A}=\frac{\beta EA}{2l_0}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_{n+1}^T+\frac{N_m}{2\beta l_m}\mathbf{e}_m(\mathbf{e}_m-\beta\mathbf{e}_{n+1})^T+\frac{N_m}{2l_m}\mathbf{f}_m\mathbf{f}_m^T \tag{3-16}$$

根据刚度矩阵 **K**，可以将式（3-14）中杆件内力部分替换掉，成为

$$\mathbf{g}_m=\mathbf{K}d_m+\mathbf{M}\mathbf{a}_m-\mathbf{q}_{e,m}=0 \tag{3-17}$$

前面讲到过，一般的有限元动力分析过程是将有限元和动力分析作为两部分分开的，有限元部分提供结构在几何质量等属性上的信息，而动力分析则提供动力响应部分。但是在能量守恒积分方法中，这一点并不符合，从上式可以看出，结构的刚度矩阵 **K** 中不仅包含了有限元部分的结构信息，而且也需要用到体系的动力响应部分，因此，从严格意义上来讲，能量守恒积分方法并不是一个标准的积分方法，而是同时参与空间离散和时间离散的一种不同于以往的积分算法。这就要求能量法的实现需要更多的步骤。

现在在求整个运动方程的等效刚度矩阵时，可以对方程进行微分，得到

$$\delta \mathbf{g}_m = \delta \mathbf{q}_{i,m} + \frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix} m_1 \delta \mathbf{v}_1 \\ m_2 \delta \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_t \delta \mathbf{d} \tag{3-18}$$

将 **K** 带入上式得到

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K} + \frac{2}{\Delta t^2}\begin{bmatrix} m_1 \mathbf{I} & 0 \\ 0 & m_2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{3-19}$$

由于能量守恒积分方法采用了中点假设，因此在中点位置的位移 $\mathbf{d}_m$ 是积分时刻位移 $\mathbf{d}$ 的一半，得到下式

$$\delta \mathbf{d} = 2\delta \mathbf{d}_m \tag{3-20}$$

因此能量守恒积分方法在中点位置的等效单元刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{d} = 2\mathbf{K}_t \delta \mathbf{d}_m = \mathbf{K}_e \delta \mathbf{d}_m \tag{3-21}$$

其中

$$\mathbf{K}_e = 2\mathbf{K}_t + \frac{4}{\Delta t^2}\begin{bmatrix} m_1 \mathbf{I} & 0 \\ 0 & m_2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{3-22}$$

最后由平均加速度的假定，以及 $\mathbf{d}_m$ 与 $\mathbf{d}$ 之间的关系，得到 n+1 步的反应量与 $\Delta \mathbf{d}_m$ 的关系式

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{n+1} &= \mathbf{U}_n + 2\Delta \mathbf{d}_m \\ \dot{\mathbf{U}}_{n+1} &= \frac{4}{\Delta t}\Delta \mathbf{d}_m - \dot{\mathbf{U}}_n \\ \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} &= \frac{8}{\Delta t^2}\Delta \mathbf{d}_m - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_n - \ddot{\mathbf{U}}_n \end{aligned} \tag{3-23}$$

3.3.2 能量守恒积分方法的实现

上文指出了能量守恒积分方法与传统积分方法的不同之处，认为能量守恒积分方法在 OpenSees 中实现，并不能像一般方法那样，比如平均加速度方法等，可以直接单独建立一个积分方法的子程序添加到积分方法的族类中。前面分析过，能量守恒积分方法在组装刚度矩阵的时候，需要结合空间和时域两部分，因此，这种组装的过程不能仅通过一个积分方法程序来完成，而需要在模型的子程序中也加入相应的计算函数。由于本理论适用于桁架单元，因此主要考虑 Truss 单元作为该方法的实现载体。

根据上面的理论、公式，通过编程实现（3-6）式的组装。如下图，在整个编程中，主要在建模模块（ModelBuilder）中的单元部分中添加了 TrussforEnergy.cpp 和分析模块（Analysis）中添加积分器程序 EnergyConserving.cpp，以及对应的 h 文件。通过这两个子程序实现能量守恒积分方法在空间和时域之间的联系，完成各部分的组装。

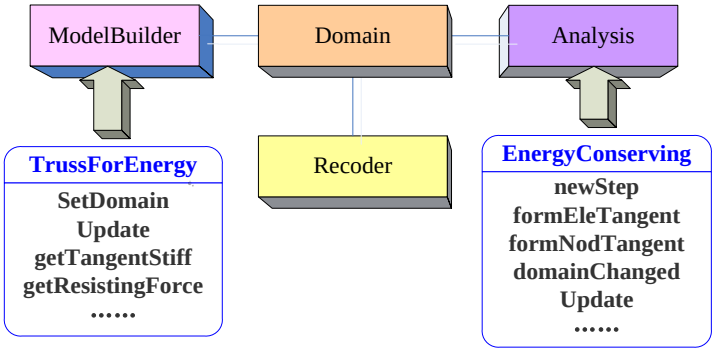


图 3-4 能量守恒积分方法模块添加示意图

3.3.2.1 TrussforEnergy.cpp

在单元程序 TrussforEnergy.cpp 中，主要是通过各个类来形成式（3-6）中的单元部分的不平衡力，其中的主要函数类有以下几个，并且只介绍二维单元的实现：

1. TrussForEnergy::setDomain(Domain *theDomain)

```
if(numDIM == 2) {
        deltad[0] = end2Crd(0)-end1Crd(0);
        deltad[1] = end2Crd(1)-end1Crd(1);
        Lo =sqrt(deltad[0]*deltad[0] + deltad[1]*deltad[1]) ;
        double EA = A*theMaterial->getTangent();
        EA /= Lo;
        No = EA*(sqrt(deltad[0]*deltad[0] + deltad[1]*deltad[1]- Lo);
}
```

图 3-5 setDomain 函数类部分代码

这个函数类主要执行的工作是提取结构的初始基本属性，包括初位移、初始坐标等，从而计算出初始杆长、初始内力等信息。

2. TrussForEnergy::update(void)

Update 函数类是 TrussForEnergy 整个子程序中比较重要的一个类，代码也比较长，在本文中就不继续列出。其主要的工作是根据积分器传来的上一个迭代步位移 $\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{(i)}$ 和下一个迭代步位移 $\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}$，并且读取 setDomain 中记录和计算出的结构

初始信息，更新新的迭代步需要用到的变量，包括式（3-16）里 **A** 中的所有相关变量。

3. TrussForEnergy::getTangentStiff(void)

```
for (i = 0; i < numDIM; i++){
        for (j = 0; j < numDIM; j++){
            temp = EA*beta*em[i]*ep[j];
            kt(i,j) = temp;
            kt(i+numDOF2,j)= -temp;
            kt(i,j+numDOF2)= -temp;
            kt(i+numDOF2,j+numDOF2)= temp;
        }
    }
for (i = 0; i < numDIM; i++) {
        for (j = 0; j < numDIM; j++){
            temp = Nm*em[i]*(em[j]-beta*ep[j])/Lm;
            kt(i,j) += temp;
            kt(i+numDOF2,j) += -temp;
            kt(i,j+numDOF2) += -temp;
            kt(i+numDOF2,j+numDOF2) += temp;
        }
    }
for (i = 0; i < numDIM; i++) {
        for (j = 0; j < numDIM; j++){
            temp = Nm*fm[i]*fm[j]/Lm;
            kt(i,j) += temp;
            kt(i+numDOF2,j) += -temp;
            kt(i,j+numDOF2) += -temp;
            kt(i+numDOF2,j+numDOF2) += temp;
        }
    }
```

图 3-6 getTangentStiff 函数部分代码

getTangentStiff函数类主要是为了计算和组装单元刚度矩阵，通过三步分别计算单元刚度矩阵 **K** 中A的三项，然后将三部分相加，组装成单元的刚度矩阵。这

里明显的能量法与其他方法不同，一般在Truss单元里，刚度矩阵的这一函数只包含了单元的材料、截面等信息，通过这些来计算出刚度，但是能量法在这里不仅利用到了单元本身的基本属性，还需要单元此时的轴力以及单元节点的动力响应。因此，图3-6表示的不仅仅是一个单元刚度矩阵的计算，而且包含了能量法本身积分方法的特性。

4. TrussForEnergy::getMass(void)

```
double M = 0.5*rho*Lo;
    int numDOF2 = numDOF/2;
    for (int i = 0; i < numDIM; i++) {
        Mass(i,i) = M;
        Mass(i+numDOF2,i+numDOF2) = M;
    }
```

图 3-7 getMass 执行代码

OpenSees 中，桁架单元的质量通过单元重度来计算，需要注意的是，单元质量最后并不是作为均布质量来进行不平衡力的计算，而是将单元质量集中到单元的两端，每端集中单元的一半质量，这样再形成单元的质量矩阵$\mathbf{M}_e$。

5. TrussForEnergy::addLoad(ElementalLoad *theLoad, double loadFactor)

这部分主要是用来组装不平衡力中的单元上施加的外力$\mathbf{P}_e(t+\Delta t)$，但是由于对于作用在桁架单元上的外力，可以通过等效方法，将外力转化成集中在单元两端节点上的集中力，因此，OpenSees中，并不支持沿单元作用的外力。

6. TrussForEnergy::getResistingForce()

```
for (int i = 0; i < numDIM; i++) {
    temp = Nm * em[i];
    (*theVector)(i) = -temp;
    (*theVector)(i+numDOF2) = temp;
}
    (*theVector) -= *theLoad;
```

图 3-8 getResistingForce 函数类执行代码

getResistingForce 通过提取在 TrussForEnergy::update 中计算得到的内力 N_m，然后进行局部坐标转换，最后在外力的基础上组装这部分内力，得到$\mathbf{P}_e(t+\Delta t)-\mathbf{F}_{Re}(\dot{\mathbf{U}}^{(i)}_{e_{t+\Delta t}},\mathbf{U}^{(i)}_{e_{t+\Delta t}})$。

7. TrussForEnergy::getResistingForceIncInertia()

```
for (int i = 0; i < numDIM; i++) {
    (*theVector)(i) += M*(accel1(i)+Taccel1(i))/2;
    (*theVector)(i+numDOF2) += M*(accel2(i)+Taccel2(i))/2;
}
```

图 3-9 getResistingForceIncInertia 函数部分执行代码

由于能量守恒积分方法是基于中点建立平衡方程，所以在不平衡力中惯性力部分需要利用两个时间点加速度的中间值来得到，因此先提取加速度，求均值，然后求出惯性力，最后在上一步不平衡力的基础上再加上惯性力，得到 $\mathbf{P}_e(t+\Delta t)-\mathbf{F}_{Ie}(\ddot{\mathbf{U}}^{(i)}_{e_{t+\Delta t}})-\mathbf{F}_{Re}(\dot{\mathbf{U}}^{(i)}_{e_{t+\Delta t}},\mathbf{U}^{(i)}_{e_{t+\Delta t}})$。

通过以上三步计算，得到能量守恒积分方法所要组装的不平衡力 $\mathbf{P}^*=\mathbf{P}^*_n+\mathbf{P}^*_e$ 中的 $\mathbf{P}^*_e$。由于节点部分的不平衡力 $\mathbf{P}^*_n$ 可以通过OpenSees原本的代码实现，并不在本课题的开发范围。

3.3.2.2 EnergyConserving.cpp

在积分器程序EnergyConserving.cpp中，其工作主要是求解更新步t+Δt时刻的运动反应量，主要的函数类有以下几部分。

1. EnergyConserving::newStep(double deltaT)

```
Udot->addVector(0, *Utdot, -1.0);
Udotdot ->addVector(0,*Utdotdot,-1.0);
Udotdot ->addVector(1,*Utdot,-2.0*c2);
theModel -> setVel(*Udot);
theModel -> setAccel(*Udotdot);
```

图 3-10 newStep 函数类部分代码

根据 OpenSees 的分析框架，在每一个积分步的开始，都需要提供一组试算的反应量 $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$、$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ 和 $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$，一般认为 $\mathbf{U}^{(0)}_{t+\Delta t}=\mathbf{U}_t$，然后通过积分方法确定 $\dot{\mathbf{U}}^{(0)}_{t+\Delta t}$ 和 $\ddot{\mathbf{U}}^{(0)}_{t+\Delta t}$。根据能量守恒积分方法的理论，利用记录的上一步反应量 $(\mathbf{U},\dot{\mathbf{U}},\ddot{\mathbf{U}})$，这组试算量可以定义为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}}_{n+1}&=-\dot{\mathbf{U}}_n\\ \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}&=-\frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_n-\ddot{\mathbf{U}}_n\end{aligned}\qquad(3\text{-}24)$$

2. EnergyConserving::formEleTangent(FE_Element *theEle)

```
theEle->zeroTangent();
theEle->addKtToTang(c1);
theEle->addMtoTang(c3);
```

图 3-11 formEleTangent 函数类部分代码

需要通过两个步骤进行$\mathbf{K}^*\Delta\mathbf{U}_n^{(i)}=\mathbf{P}^*$中等效刚度矩阵$\mathbf{K}^*$的组装，先组装等效单元刚度矩阵$\mathbf{K}_e^*=\underset{e}{\mathbf{A}}(\mathbf{M}_e\mathbf{I}_2'+\mathbf{C}_e\mathbf{I}_1'+\mathbf{K}_e)$，得到$\bar{\mathbf{K}}_e=2\mathbf{K}_t+\frac{4}{\Delta t^2}\begin{bmatrix} m_1\mathbf{I} & 0 \\ 0 & m_2\mathbf{I}\end{bmatrix}$

3. EnergyConserving::formNodTangent(DOF_Group *theDof)

```
theDof->zeroTangent();
theDof->addMtoTang(c3);
```

图 3-12 formNodTangent 函数类部分代码

第二步组装等效节点刚度矩阵$\mathbf{K}_n^*=\underset{n}{\mathbf{A}}(\mathbf{M}_n\mathbf{I}_2')$。

4. EnergyConserving::domainChanged()

```
AnalysisModel *myModel = this->getAnalysisModel();
LinearSOE *theLinSOE = this->getLinearSOE();
const Vector &x = theLinSOE->getX();
```

图 3-13 domainChanged 函数类部分代码

根据前面的组装，调用分析模块，进入迭代求解过程，将前面组装的结果存入$\mathbf{K}^*\Delta\mathbf{U}_n^{(i)}=\mathbf{P}^*$，并且计算出结果$\mathbf{x}=\Delta\mathbf{U}_n^{(i)}=2\Delta\mathbf{d}_m$。

5. EnergyConserving::update(const Vector &deltaU)

```
(*U) += 2.0*deltaU;
Udot->addVector(1.0, deltaU, 2.0*c2);
Udotdot->addVector(1.0, deltaU, 2.0*c3);
theModel->setResponse(*U,*Udot,*Udotdot);
```

图 3-14 update 函数类部分代码

由能量守恒积分方法理论，通过以上计算出的位移增量$\Delta\mathbf{U}_n^{(i)}$，得出下一步的计算反应量

$$\begin{aligned}
&\mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{U}_n+2\Delta\mathbf{d}_m \\
&\dot{\mathbf{U}}_{n+1}=-\dot{\mathbf{U}}_n+\frac{4}{\Delta t}\Delta\mathbf{d}_m \\
&\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}=-\frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_n-\ddot{\mathbf{U}}_n+\frac{8}{\Delta t^2}\Delta\mathbf{d}_m
\end{aligned} \tag{3-25}$$

并且更新结构的信息，进入下一步的计算。

对于新添加的TrussForEnergy和EnergyConserving两个子程序，其在OpenSees中的调用运算如图3-15所示。

首先OpenSees读取提前编写好的Tcl文件，并将文件中结构的节点信息和单元信息分别通过Domain模块传递到Node和TrussForEnergy子程序中，然后TrussForEnergy中的setDomain函数计算方法所需要的初始信息，之后，OpenSees会在Node中确定t和$t+\Delta t$时刻的计算量，用于迭代计算。

当计算开始时，由EnergyConserving中的newStep根据迭代位移增量计算t+Δt时刻的运动量，并更新。TrussForEnergy的update函数则由更新的运动反应量计算单元坐标，再根据坐标计算方向向量和其他变量，以及单元的轴向应变Δε，然后根据这些变量，TrussForEnergy进行一系列的处理，计算单元的材料刚度矩阵和几何刚度矩阵，计算单元质量矩阵，从而集成单元杆端力，得到$\mathbf{P}^*$。

在EnergyConserving中也进行一些计算，集成等效刚度矩阵，并且计算不平衡力和迭代位移增量，最后在EnergyConserving中的update中累加迭代位移增量，更新增量步结点位移和其他反应量。

以上是能量守恒积分方法在OpenSees中的实现过程及其中函数程序被调用的过程，是基于OpenSees原本的计算框架而进行的代码执行过程。

3.4 简单算例验证

为了验证能量方法在 OpenSees 程序实现的可靠性，采用一个简单的单摆算例进行验证。如图 3-16，单摆杆长 L=1.0m，杆件密度ρ=7860kg/m^3，杆件横截面积A=0.0025m^2，杆件材料弹性模量 E=2.0×10^{5}MPa，对单摆下端施加一横向初速度v_0=1m/s，单摆做自由振动。

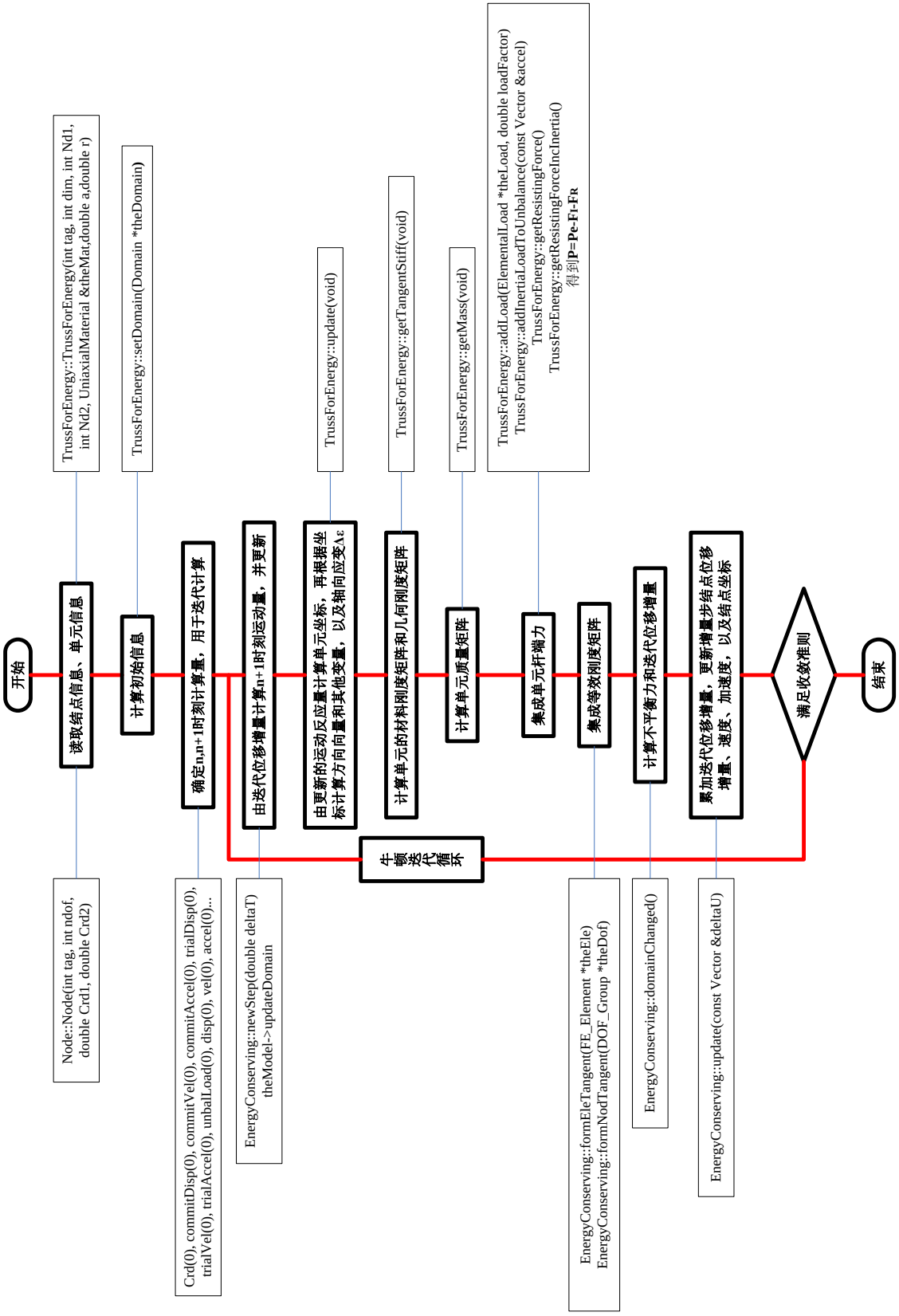


图 3-15 能量守恒积分方法各函数类在 OpenSees 中的实现流程图

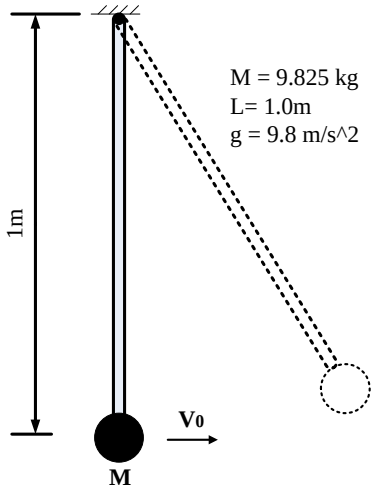
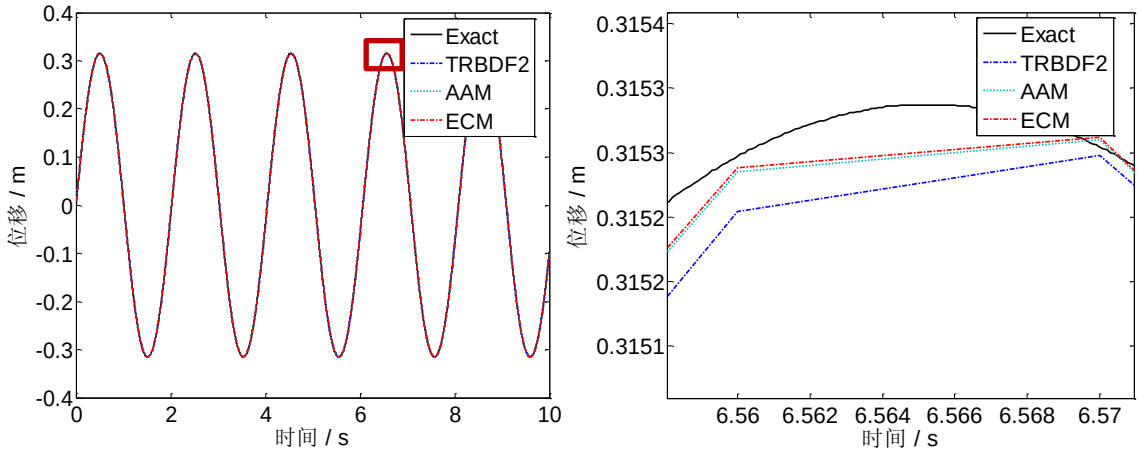


图 3-16 单摆示意图

将积分步长Δ*t*=0.001s 的中心差分法的计算结果视为精确解，分别用能量守恒积分方法（ECM）、平均加速度方法（AAM），梯度法（TRBDF2）三种积分方法计算。其中 TRBDF2[45]（Trapezoidal rule/backward-differentitation-formula）方法是 OpenSees 中已有的一种积分方法，以下称其为梯度法。梯度法的基本理论是由 Bathe[46]针对已有的 TRBDF2 方法进行改进提出，对于考虑大变形的非线性动力分析，是一种无条件稳定的积分算法。

3.4.1 动力响应

3.4.1.1 Δ*t*=0.01s



a）单摆底端 X 方向位移时程　　b）位移时程局部放大图

图 3-17 Δ*t*=0.01s 时三种积分方法与精确解 X 方向位移反应对比

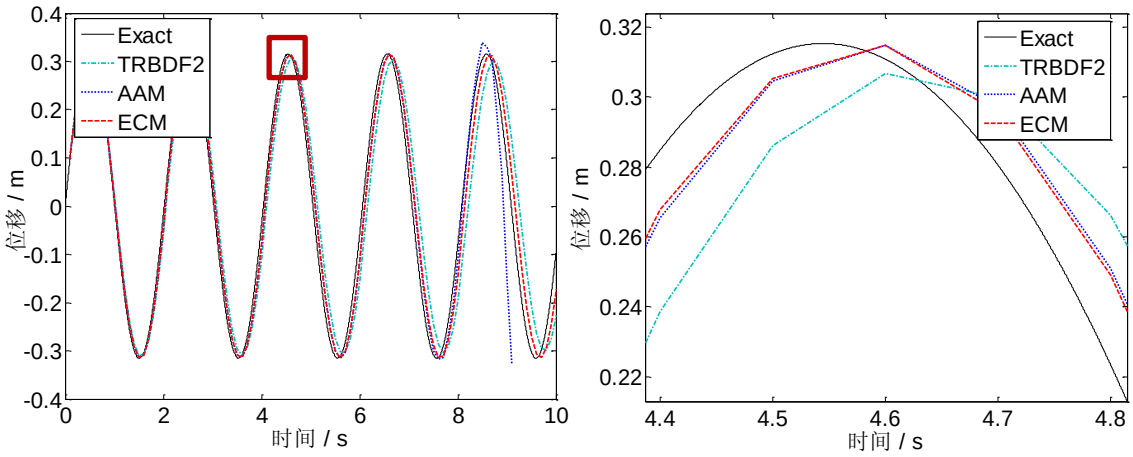
从整体位移图上看，时间步长在 $\Delta t = 0.01\text{s}$ 时，三种方法都没有发散，且计算

结果与精确解比较吻合，说明三种积分方法在这个积分步长情况下，可以保持很好的稳定性，另外也计算了 1000 个周期的运动反应，也没有出现发散的现象，可以认为在本算例中，$\Delta t = 0.01\text{s}$ 的时间步长满足三种方法的收敛要求。

从位移时程放大图中比较，能量守恒积分方法与平均加速度方法的计算结果较为接近，这是由于能量方法本身就是基于平均加速度假定推导而来，所不同的是能量法是基于中点构形建立了平衡方程，而平均加速度方法则是基于积分时间点建立平衡方程。从放大图中可以看出，梯度法的结果与另外两种积分方法的计算结果差别较大，从与峰值的接近程度来看，能量方法的结果更接近峰值，平均加速度法次之，梯度法方法的峰值离精确解最远，由此得出三种积分方法，能量守恒积分方法的计算精确度更高，最符合精确结果。

3.4.1.2 Δt=0.1s

当增大时间步长到 $\Delta t = 0.1\text{s}$ 时，三种方法的计算结果出现了较为明显的差别：能量守恒积分方法和梯度法两种积分方法没有发散，而平均加速度方法计算结果发散，并且每种方法计算结果的运动周期都有所增加。



a）单摆底端 X 方向位移时程　　b）位移时程局部放大图

图 3-18 Δt=0.1s 时三种积分方法与精确解 X 方向位移反应对比

从整体位移图上看，三者计算结果在初期比较接近，然后逐渐产生差别。在运动开始的第一个周期以内，三种方法的计算结果与精确解都很接近，但是仍然可以明显看出能量守恒积分方法更接近精确解；随着计算时间的推移，三种方法的计算结果差别逐渐变大，平均加速度法法首先发散。通过另外计算 1000 个周期的结果显示，能量方法和梯度方法均没有出现发散的情况。从位移时程曲线可以发现，三种方法在计算过程中，反应周期都有增大的趋势，由于平均加速度方法方法与能量方法都是基于平均加速度假定，两种方法在周期延迟和计算精确度都只有略微的差别，但是梯度法则与精确解差别最大，周期延迟的现象也更明显。另

外，从放大图中可以看出，在平均加速度方法发散后，能量法的结果仍然与精确解更为接近。

综合上述位移的计算结果，能量守恒积分方法方法在稳定性上优于平均加速度法，在计算精确度上则优于梯度法。

3.4.2 积分方法的能量

上一章指出，判断一个积分方法的数值稳定性，可以采用能量准则，即在离散系统中，能量是否有界。上一章的推导中，证明平均加速度方法（AAM）的体系能量并不稳定，可能有界也可能能量增量大于 0，也就是说，平均加速度方法的数值稳定性与积分步长有关，若积分步长比较小，则体系能量有界，可以收敛。而对于能量守恒积分方法（ECM），其体系能量始终保持定值，即能量增量为 0，由能量准则可以知道，能量方法是无条件稳定算法。

下面通过单摆算例的能量来对比三种算法的稳定性。

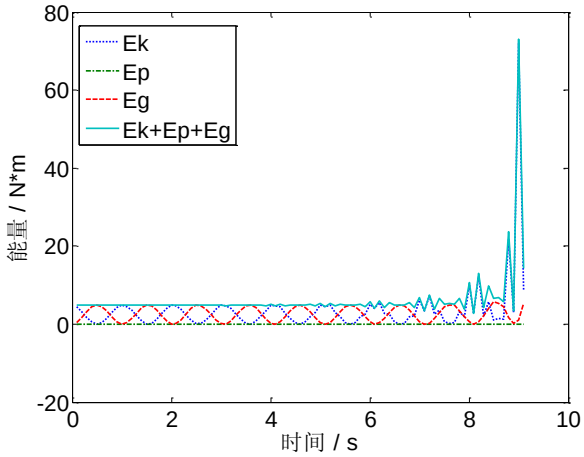


图 3-19 Δ*t*=0.1s 时平均加速度方法能量时程

当积分步长 $\Delta t = 0.1\text{s}$，平均加速度方法计算单摆体系在自由振动时结果发散，观察方法的能量时程曲线图，体系的能量由三部分组成，分别是动能，内能以及重力做功，由于单摆运动时，轴力很小，故体系内能几乎为 0，动能和内能是主要的能量组成部分。

从能量时程曲线中看出，三部分能量在前期的变化很有规律，符合自由振动的规律，体系总能量也保持恒定值，随着时间推移，总能量开始出现波动，然后波动逐渐剧烈，到最后体系总能量急剧增加，出现发散，计算停止。

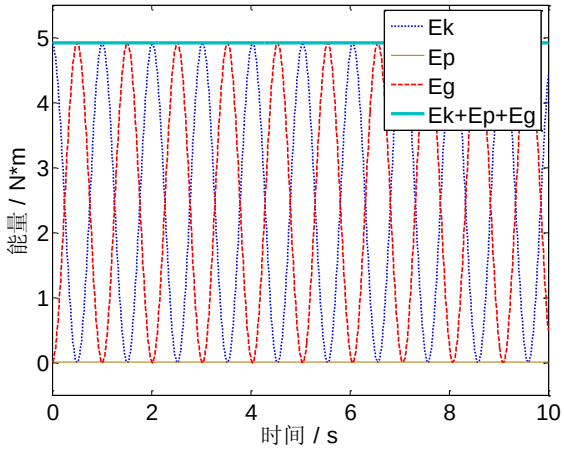


图 3-20 Δt=0.1s 时能量守恒积分方法能量时程

采用同样的积分步长 $\Delta t = 0.1\text{s}$ 时，由能量守恒积分方法计算得到的能量时程曲线如图，从图中可以发现，由动能，内能，重力做功三部分能量组成的总能量始终保持不变，等于能量初值 4.9125N*m，这符合能量守恒积分方法的理论假定。

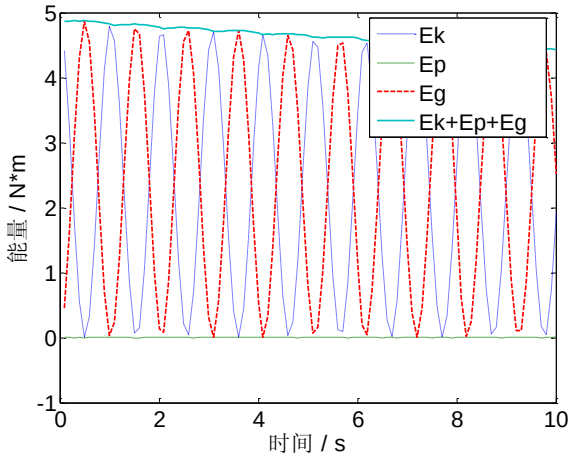
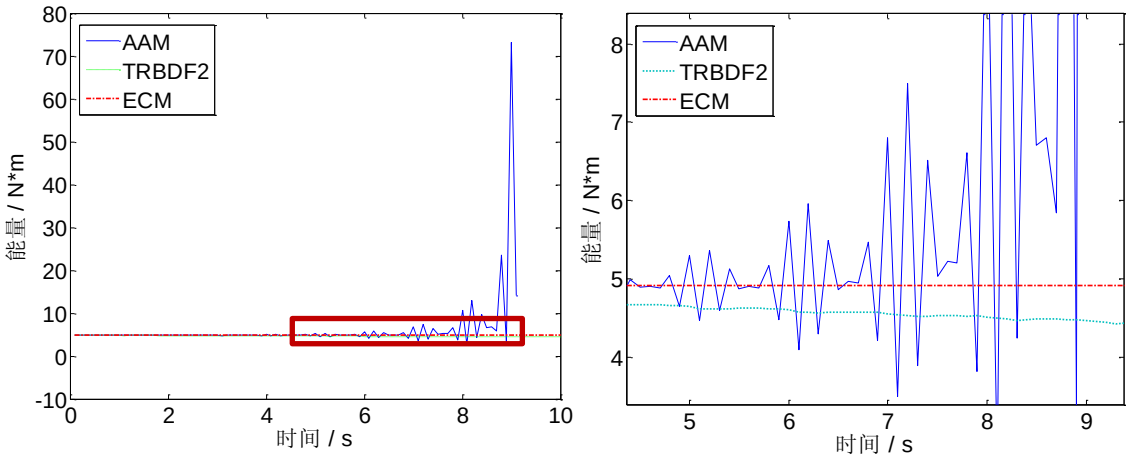


图 3-21 Δ*t*=0.1s 时梯度法能量时程

在积分步长 $\Delta t = 0.1\text{s}$ 时，梯度法计算单摆体系在自由振动的情况下，其能量时程曲线如图所示，可以发现，动能，内能和重力做功的能量时程体现出衰减的趋势。

根据前面位移时程的计算，梯度法的位移计算结果较精确解有所减小，其他动力响应如速度及轴力也是如此，这是因为该方法中引入了数值阻尼的缘故。最后的结果是由该方法计算得到的体系总能量也体现出衰减的趋势。



a）单摆总能量时程　　b）能量时程局部放大图

图 3-22 Δ*t*=0.1s 时三种积分方法计算的总能量对比

当积分步长 $\Delta t = 0.1\text{s}$ 时，将三种方法的总能量时程放在一起对比，从结构体系总能量放大图中，能量守恒积分方法（ECM）方法计算体系能量保持定值，平均加速度法（AAM）结果波动剧烈，梯度法（*T*RBDF2）则体现能量逐渐减少的趋势。

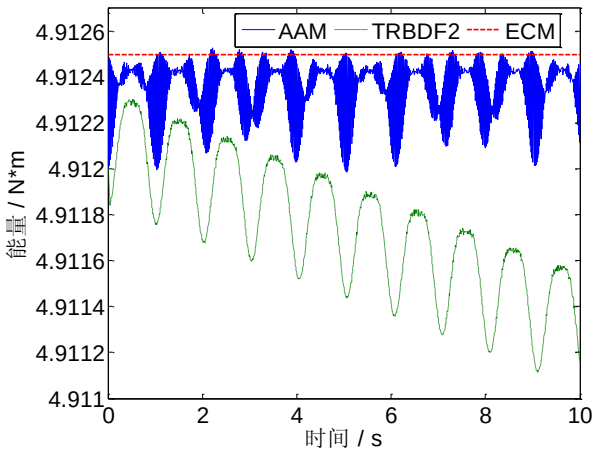


图 3-23 Δ*t*=0.01s 时三种积分方法计算的单摆总能量对比

当时间步长减小，$\Delta t = 0.01\text{s}$ 时，对比三种方法计算的结构体系总能量，能量守恒积分方法（ECM）依然保持恒定的体系能量，而平均加速度方法（AAM）在这个积分步长下没有出现发散的现象，所以总能量没有急剧增加的情况，但是由于其能量增量并不为 0，由平均加速度法计算得到的体系总能量仍然处于波动中，波动的幅度也较小，并且处于一定的范围之内；梯度法（*T*RBDF2）则体现出一种在波动中不断衰减的趋势。

3.5 本章小结

本章先探索了 OpenSees 软件的动力分析过程，并对 OpenSees 进行了二次开发，将能量守恒积分方法（ECM）加入到 OpenSees 的分析模块，利用重新编译的 OpenSees 软件，进行了一个单摆数值算例分析，得到一下结论：

1. 通过简单的单摆算例，验证了本课题针对 OpenSees 二次开发的能量守恒积分方法的有效性和正确性。
2. 分析比较梯度法、能量守恒积分方法以及平均加速度方法这三种逐步积分方法的方法特性，认为能量守恒积分方法在数值稳定性特性上优于平均加速度方法，在计算精度上优于梯度法。
3. 通过体系能量的对比，验证了体系能量对积分方法数值稳定性的判断标准，平均加速度法计算的能量有波动，能量增量可能为正也可能为负，在积分步长增大的时候，能量会增大，从而发散；梯度法计算的能量逐渐减小，呈衰减趋势，也就是说能量增量为负，从而保证了其数值稳定性；能量守恒积分方法计算的总能量始终保持定值，能量增量为 0，即能量守恒，从而能保证其积分方法数值稳定性。

第四章 能量守恒积分方法的应用

4.1 引言

在第 3 章中，从理论上推导了平均加速度方法（AAM）和能量守恒积分方法（ECM）的能量增量，通过能量准则来判断两种积分方法的数值稳定性，并通过给 OpenSees 添加的能量守恒积分方法程序，进行了简单数值算例验证。但是单摆算例只考虑了几何非线性，采用的是线弹性材料，对于不断应用新的材料，新的体系的实际工程结构来说，平均加速度方法和能量守恒积分方法有怎样的应用价值并不清楚。能量守恒积分方法虽然已经被提出了二十多年，但是一直被应用于航天领域，在结构工程中并没有见到应用的案例。基于此，本课题将能量守恒积分方法加入到 OpenSees 这一专门用于结构工程的有限元软件中，并在本章中通过几个工程应用算例来探讨能量守恒积分方法和其他积分方法的应用。

4.2 平面桁架应用

对于能量守恒积分方法在结构工程中的应用已经有所研究，潘天林和吴斌等人在文献[32]中用 MATLAB 编写了能量守恒积分方法的分析程序，并且用此程序进行了一个平面桁架模型以及一个三维网架的结构算例分析。本文引用其文章中的算例进行分析，所不同的是，分析采用的程序是基于本文二次开发之后将添入能量守恒积分方法的 OpenSees 软件。

如下图中所示，40m 跨度的平面桁架，高 1m，两端铰接，密度为 7800kg/m^3，每根杆件的横截面积为 100mm^2，一共 161 根杆件，对杆件施加竖向初速度，使其进行自由振动。

另外，算例分析中输出的动力响应均为跨中节点，如图 4-1 中圆圈画出的节点；输出的杆件应力应变关系为图中椭圆标出的单元。

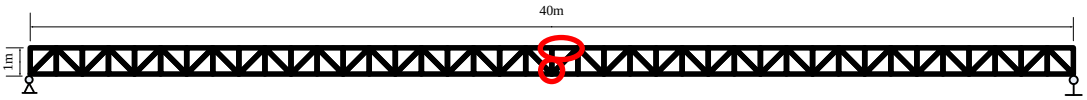


图 4-1 平面桁架模型

4.2.1 线弹性材料

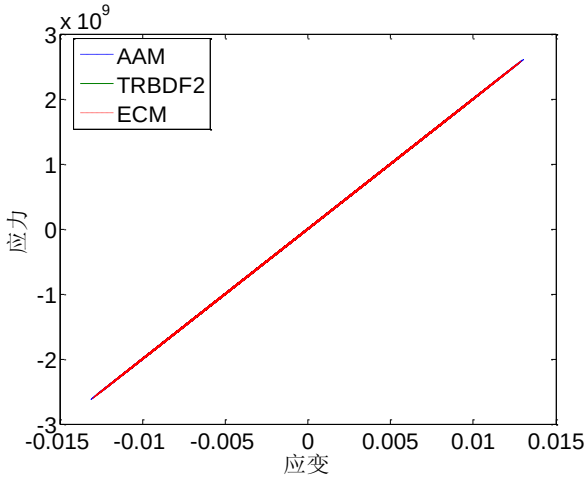
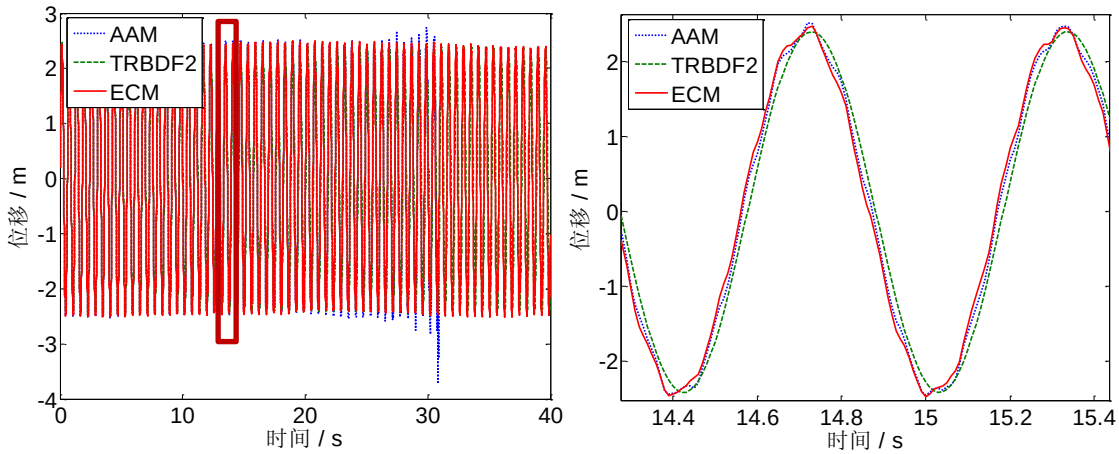


图 4-2 三种积分方法计算的单摆杆件应力-应变关系

首先对结构采用线弹性材料，弹性模量 E=2.0×10^{5}MPa，三种方法计算得到的应力应变关系如图 4-2 所示，可以发现结果符合线弹性材料本构关系，为直线，且斜率即为弹性模量 E。

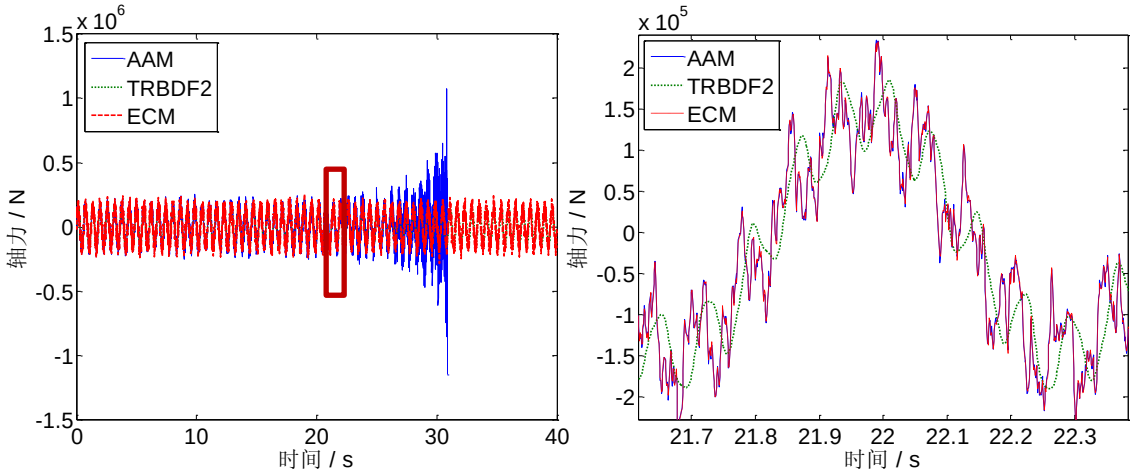
4.2.1.1 积分步长Δt= 0.01s



a）平面桁架跨中位移时程　　b）位移时程局部放大图

图 4-3 Δt=0.01s 时三种积分方法计算的跨中位移对比

在积分步长 $\Delta t = 0.01\text{s}$ 时，分别用平均加速度方法（AAM），能量守恒积分方法（ECM）以及梯度法（TRBDF2）三种积分方法计算平面桁架在竖向初速度作用下的自由振动。从位移时程曲线可以看出，平均加速度方法在 30.88s 开始发散，一共完成计算 3088 步，而能量守恒积分方法和梯度法两种方法则保持稳定。



a）平面桁架跨中杆件轴力时程　　b）杆件轴力时程局部放大图

图 4-4 Δ*t*=0.01s 时三种积分方法计算的跨中杆件轴力对比

从位移时程局部放大图中可以看出，平均加速度方法的计算结果在发散前与能量法比较接近，而梯度法的计算结果则比较光滑。同样在轴力时程曲线图中可以更明显的看出平均加速度法的发散情况，而梯度法求出的单元轴力在局部放大图中与另外两种方法的计算值有很大的区别，梯度法计算的轴力一直保持正弦曲线的形式，曲线非常光滑，而平均加速度方法和能量法得到的轴力在整体上体现出正弦曲线的形式，也就是结构的基本振型为主，但是在局部表现出高频振动，实际上这种运动方式是符合实际情况的，因为结构在振动过程中也有高阶振型的参与；梯度法由于给体系引入了数值阻尼，消去了高阶振型分量，从而在整个位移时程曲线中都显得比较光滑。

4.2.1.2 积分步长Δ*t* =0.005

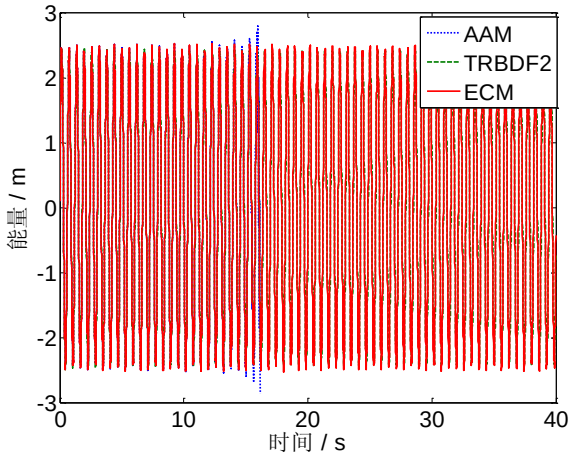
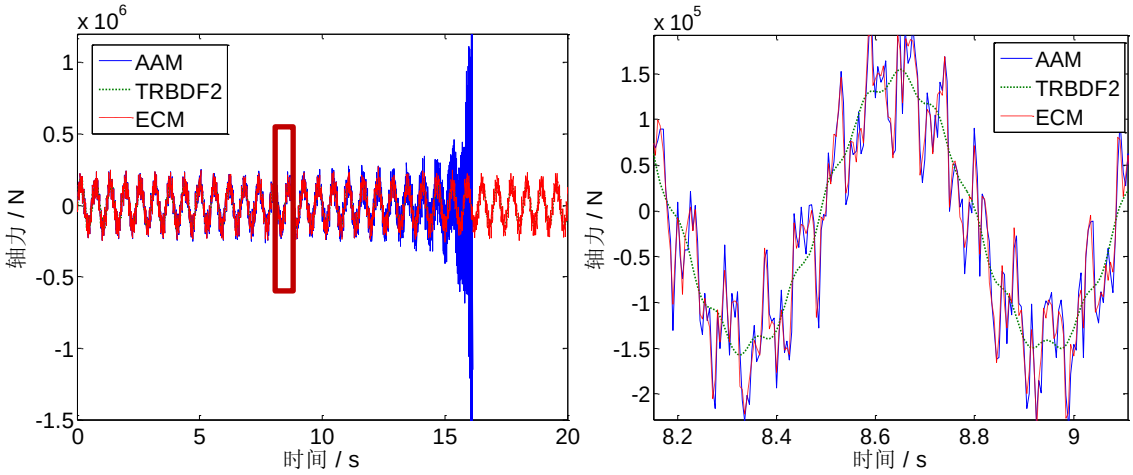


图 4-5 Δ*t*=0.005s 时三种积分方法计算的平面桁架跨中位移时程



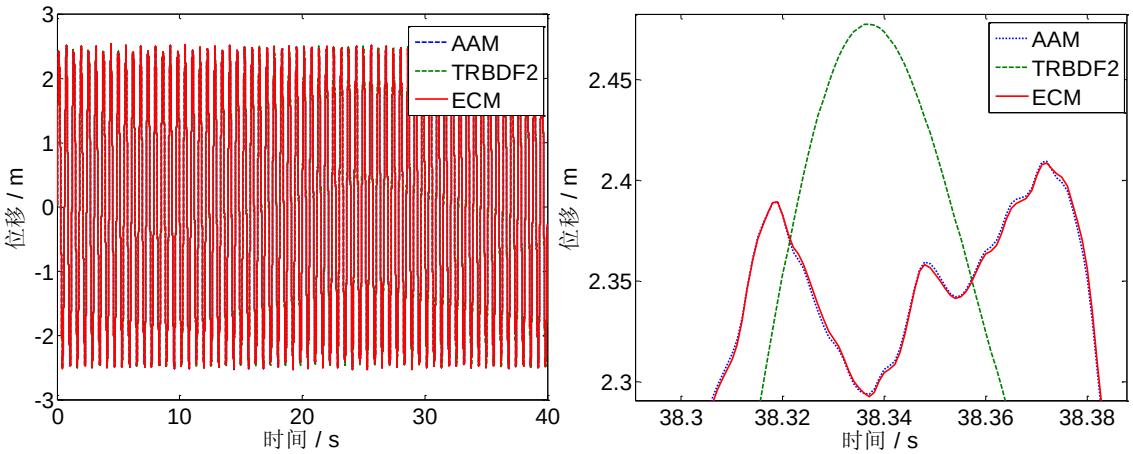
a）平面桁架跨中杆件轴力时程　　b）跨中杆件轴力时程局部放大图

图 4-6 Δ*t*=0.005s 时三种积分方法计算的平面桁架跨中杆件轴力对比

在积分步长 $\Delta t = 0.005\text{s}$ 时，三种积分方法的计算得到的位移时程、轴力时程曲线以及能量时程曲线如上所示。从图中可以看出，平均加速度方法在 16.14s 发散，完成计算 3227 步，而能量守恒积分方法和梯度法保持收敛。

从轴力时程曲线的局部放大图中可以看到，平均加速度方法和能量守恒积分方法由于采用了平均加速度假定，即 γ=0.5，没有给算法引入数值阻尼，保留了结构振动的高阶振型分量，因此从动力反应的放大图中可以明显看出高阶振型的影响，并且两种方法计算的结果也比较接近；而梯度法由于引入了数值阻尼，在整个动力分析中，滤去了系统的高频分量，所以其时程曲线比较光滑而没有振荡。

4.2.1.3 积分步长Δ*t* =0.001s



a）平面桁架跨中位移时程　　b）跨中位移时程局部放大图

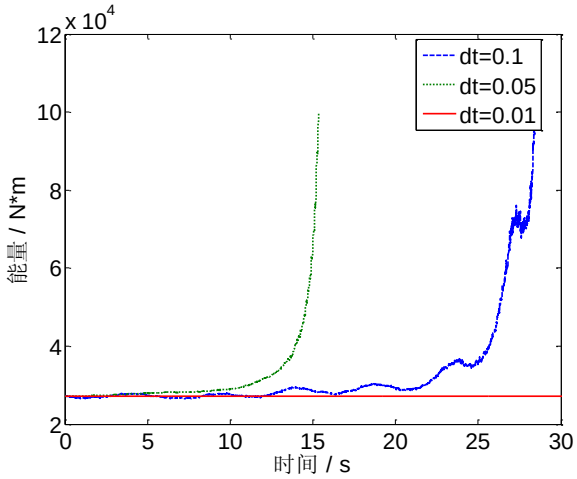
图 4-7 Δ*t*=0.001s 时三种积分方法计算的平面桁架跨中位移时程

当积分步长 $\Delta t = 0.001\text{s}$ 时，三种方法均没有发散，说明积分步长的减小，使平均加速度方法的稳定条件得以满足。

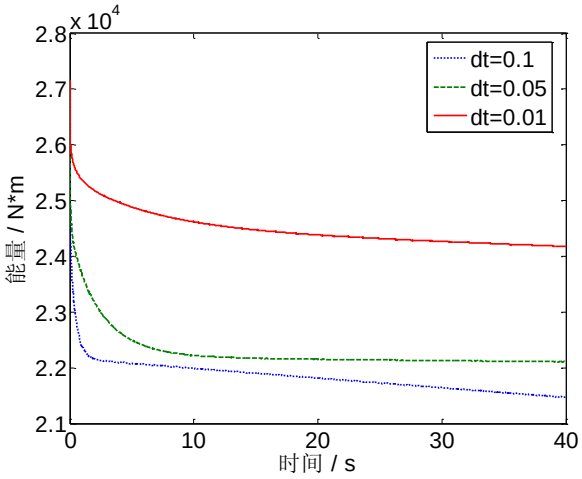
从位移的局部放大图中可以看出，平均加速度方法与能量守恒积分方法的计算结果较为接近，而梯度法同样由于滤去了高频分量，计算结果较为光滑，并且与另外两种方法计算结果差别较大。

4.2.1.4 能量对比

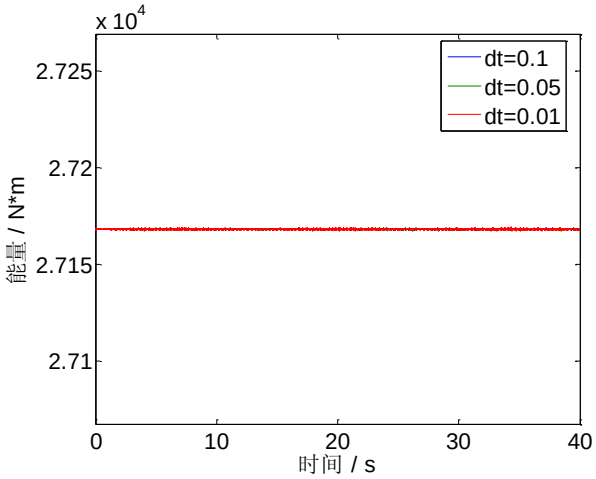
接下来从能量的角度来看三种积分方法的积分特性，通过前面的算例，分别计算三种积分方法在不同积分步长下的能量时程曲线。图 4-8 中的三张图分别表示平均加速度方法（AAM）、梯度法(TRBDF2)和能量守恒积分方法(ECM)的能量变化曲线。



a) 平均加速度方法在Δt=0.01s、Δt=0.005s、Δt=0.001s 下的能量时程比较



b) 梯度法法在Δt=0.01s、Δt=0.005s、Δt=0.001s 下的能量时程比较



c) 能量守恒积分方法在Δt=0.01s、Δt=0.005s、Δt=0.001s 下的能量时程比较

图 4-8 三种积分方法分别在三种积分步长下的总能量时程比较

图 a 为平均加速度方法计算的体系总能量时程曲线，其发散前的波动幅度随时间步长的减小而减小。从总能量图中对比可以看出，平均加速度方法（AAM）能量在发散前一直在波动，这种波动的趋势随着积分步长的减小而减小，但是一直存在，并且总能量有逐渐增大的趋势，最后到发散的时候能量急剧增加。由于平均加速法方法在积分步长$\Delta t = 0.01\text{s}$和$\Delta t = 0.005\text{s}$时均出现了发散的现象，说明该方法在考虑几何非线性的时候是一种条件稳定的算法。

图 b 为梯度法在不同积分步长时计算得到的能量时程曲线，三种情况的总能量均先有一个急速衰减，然后开始以比较小的趋势缓慢衰减，衰减的幅度与积分步长有关。积分步长越小，衰减的能量越少，由于其能量的衰减，即能量增量为负，所以该积分方法在考虑几何非线性的时候，是一种无条件稳定的积分方法。

图 c 为能量守恒积分方法在三种不同积分步长情况下计算的体系总能量时程曲线，其总能量始终保持恒定，即能量增量为 0，这是由于其算法本身平衡方程的构造时决定的，因此该方法为无条件稳定算法。

4.2.2 双线性材料

将结构材料改为双线性材料，材料的屈服应力为 Fy=235MPa，其中第一刚度的弹性模量为 E=2.0×10^{5}MPa，第二刚度为第一刚度的 1%。

上一部分中，结构采用的是线弹性材料，即只考虑了几何非线性，并没有考虑材料非线性，接下来将结构材料换成双线性材料，其他信息不变，对结构施加竖向初速度，使结构进行自由振动。

由于单独考虑几何非线性时，平均加速度方法需要较小的积分步长才能收敛，

故此时采用积分步长 $\Delta t = 0.001\text{s}$ 。

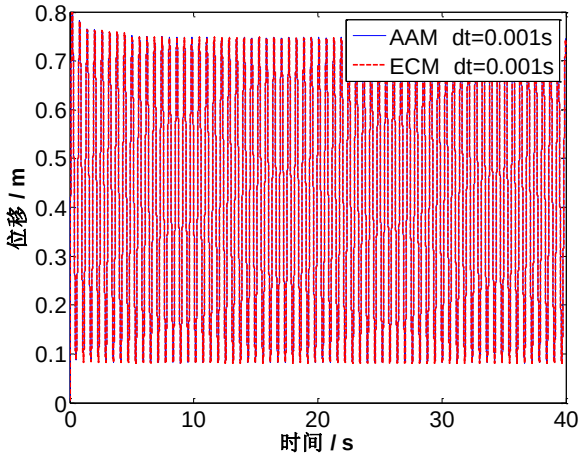


图 4-9 Δ*t*=0.001s 时两种积分方法计算的平面桁架位移时程对比

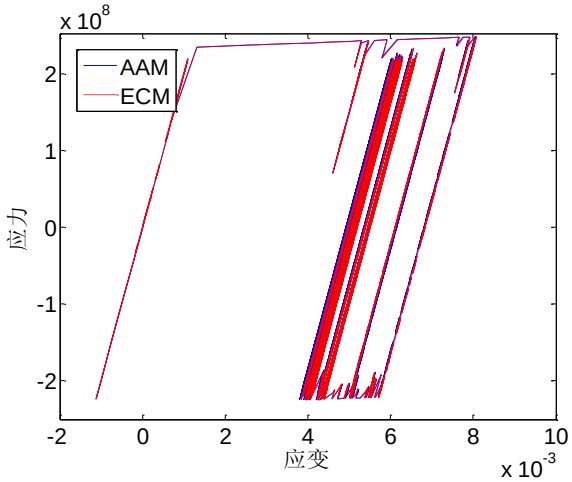


图 4-10 Δ*t*=0.001s 时平面桁架跨中杆件应力应变关系

计算结果发现，平均加速度方法与能量守恒积分方法均收敛，两种方法计算得到的位移和轴力反应比较接近，但也有略微差别，在峰值点，平均加速度方法的计算结果一般要高于能量守恒积分方法。

体系总能量由两部分组成，分别是动能和内能，如图 4-11 和 4-12，对比两种方法计算的能量曲线，可以看到，平均加速度方法的总能量一直在波动，能量增量正负不定，但在一定的范围内浮动，所以并没有发散；而能量法计算的总能量保持恒定。从图中还可以发现，两种方法计算得到的动能基本一致，但是内能则有很大区别，能量守恒积分方法计算得到的内能在 1400~1600N*m 内波动，而平均加速度法计算出的内能则在 800~2500N*m 之间波动，因此最后计算出的总能量平均加速度方法比能量法要多很多，并且不是恒定不变，而是不断波动。

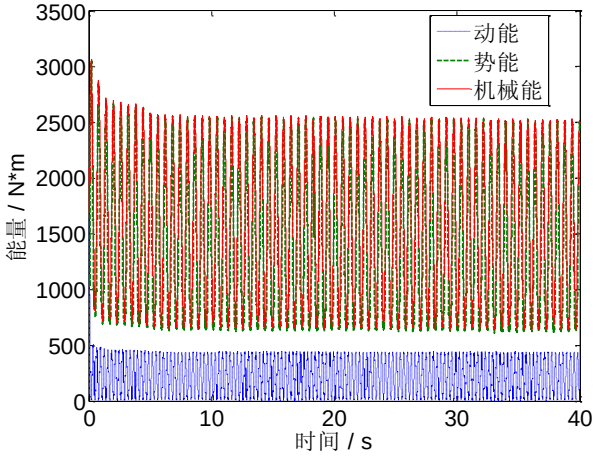


图 4-11 Δ*t*=0.001s 时平均加速度方法能量时程

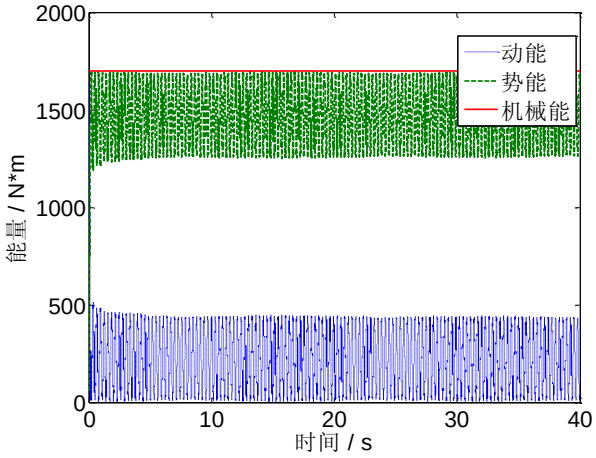


图 4-12 Δ*t*=0.001s 时能量守恒积分方法能量时程

虽然两种方法计算出的位移、轴力时程很接近，但是并不能完全吻合，最后导致能量的巨大差异，说明平均加速度方法在考虑几何非线性和材料非线性时，采取较小的积分步长，虽然能够收敛，但是计算的结果并不如能量法计算的精确。并且当几何非线性和材料非线性共同存在的时候，平均加速度方法引入的能量增量主要通过内能来体现。

4.2.3 计算效率

统计两种积分方法在不同积分步长下的计算耗时，比较两种积分方法单步所用时间，发现能量守恒积分方法整体上比平均加速度方法具有更快的计算效率，但是也相差不多。

表 4-1 能量守恒积分法与平均加速度方法计算时间对比

积分方法	分析工况	积分步长	完成积分步数	总耗时	平均每步用时
AAM	自由振动	0.01s	3088	68s	0.022020725
		0.005s	3227	69s	0.021382088
		0.001s	40000	792s	0.0198
ECM		0.01s	4000	75s	0.01875
		0.005s	8000	138s	0.01725
		0.001s	40000	686s	0.01715

4.3 四边支承网架应用

在文献[26]中，Crisfield 仅考虑了二维的桁架单元，但是他表明该方法可以被扩展延伸到三维或者梁柱、壳单元[47,48]。为了验证能量守恒积分方法的无条件稳定性，本文将能量守恒积分方法进行扩展，使其能够应用到三维网架中，其单元为空间桁架单元，并通过以下三维空间网架进行验证分析，该三维网架模型取自文献[32]中潘天林等人对能量守恒积分方法在空间结构中应用的算例模型。

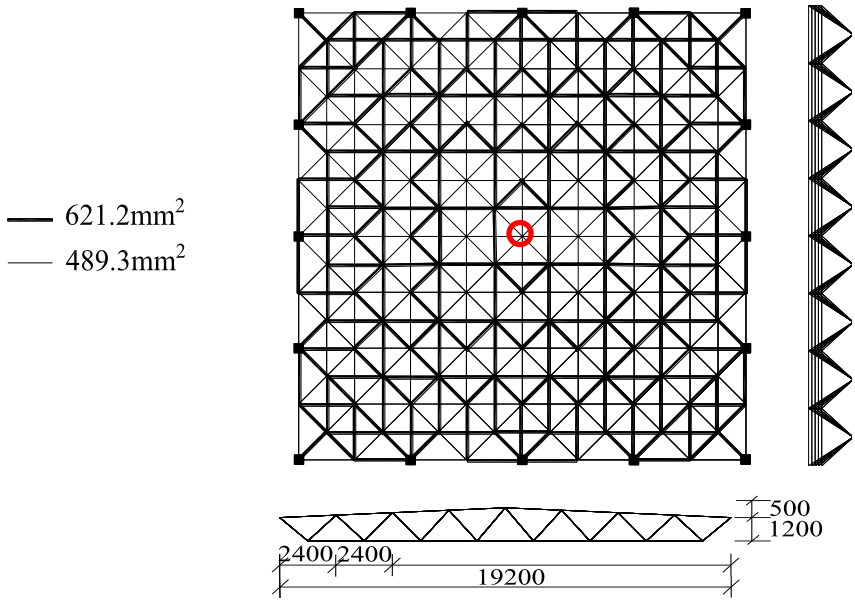


图 4-13 空间网架[32]

如上图所示，一双坡面屋顶采用正放四角锥的网架形式[49][50]，平面尺寸为 19.2m×19.2m，中间起拱高度为 0.5m，坡底高度 1.2m。网架采用四边支承，支承节点采用铰接，图中的黑色正方形表示支座位置。杆件为钢材，密度为 7850kg/m^3。杆件截面面积有两种，即 621.2mm^2 和 489.3mm^2，分别由图中的粗实线和细实线

表示。整个结构共有 512 根杆件，每一根杆件都采用空间桁架单元来模拟。

4.3.1 线弹性材料

4.3.1.1 自由振动

首先考虑该网架结构采用线弹性材料，此时对结构施加竖向初速度，结构开始进行自由振动，由于是采用线弹性材料，即没有考虑材料非线性，因此结构的动力响应主要体现了几何非线性的影响。

对两种积分方法采用三种积分步长，分别为 $\Delta t = 0.1\text{s}$ ， $\Delta t = 0.05\text{s}$ 以及 $\Delta t = 0.01\text{s}$ ，计算输出网架跨中下弦节点，即图 4-13 圆圈标出的节点。

从平均加速度方法在三种积分步长下的动力响应时程曲线可以看出，在积分步长 $\Delta t = 0.1\text{s}$ 时，计算完成 215 步，在 t=21.6s 时发散，当 $\Delta t = 0.05\text{s}$ 时，计算完成 269 步，在 t=13.5s 时发散，当步长 $\Delta t = 0.01\text{s}$ 时，方法收敛；而能量守恒积分方法在三种积分步长时均能收敛。

在 $\Delta t = 0.01\text{s}$ 时，对比两种方法均收敛时计算的动力响应，结果大致吻合，但是仍有差别。

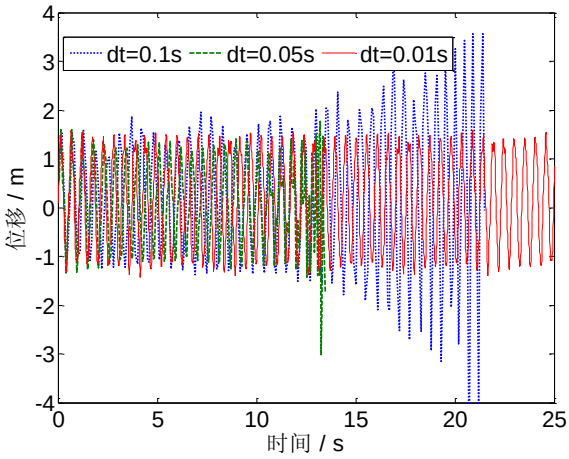


图 4-14 平均加速度方法的位移响应

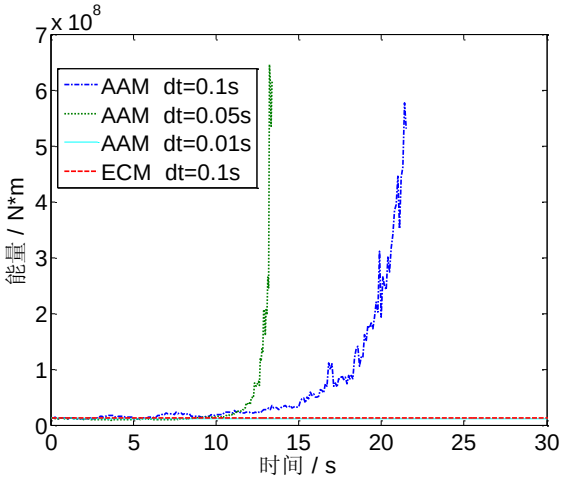


图 4-15 平均加速度法与能量法总能量

图 4-15 所示为平均加速度方法与能量守恒积分方法在三种积分步长情况下，网架体系的总能量时程曲线，平均加速度法在积分步长 $\Delta t = 0.1\text{s}$ 和 $\Delta t = 0.05\text{s}$ 时，均出现发散的现象，并且出现发散的步数随积分步长减小而增多，并且在发散前，其能量曲线一直在波动，这种波动幅度随积分步长减小而减小，这一现象与平面桁架得到的结果类似。虽然在 $\Delta t = 0.01\text{s}$ 时，平均加速度方法并没有发散，但是从其体系能量时程曲线来看，总能量并不守恒，仍然有一些细微的波动；能量守恒积分方法计算的体系能量则始终保持恒定。

4.3.1.2 竖向地震动

前面分析时采用的是自由振动，现改成施加竖向地震动，采用的地震记录为 Kobe 地震，取前 70s 的记录，并对地震动进行归一化，如下图。

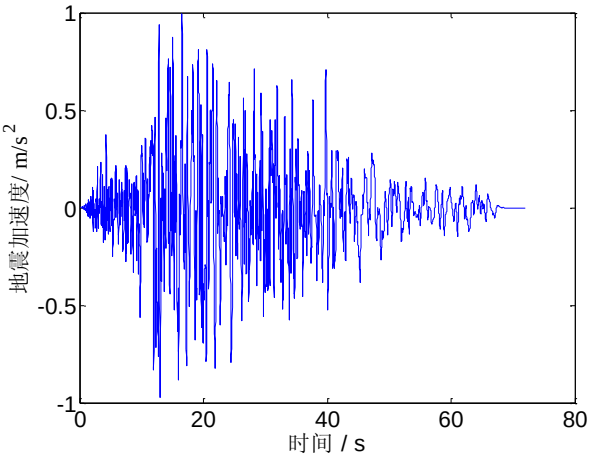
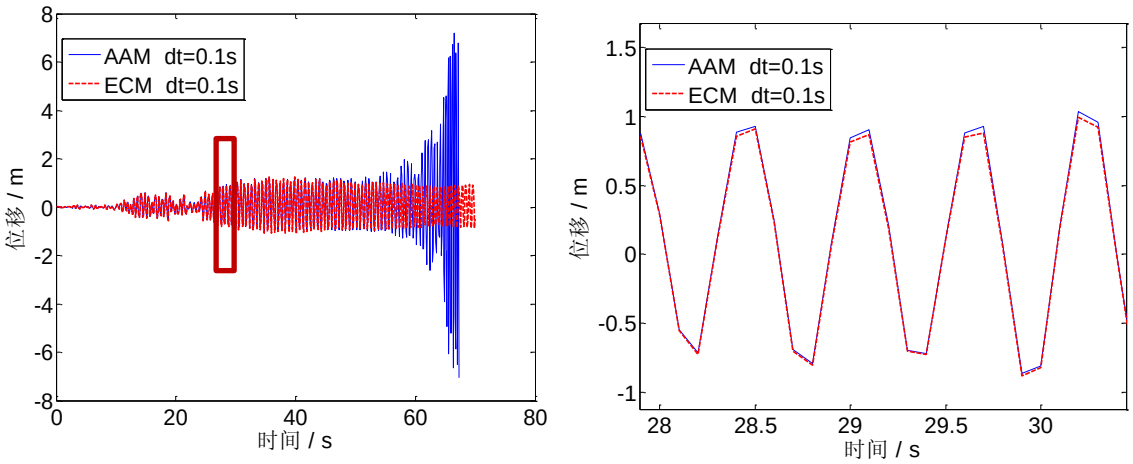


图 4-16 Kobe 地震记录（N-S）

给网架结构施加 2g 竖向地震动，考虑大震作用下的结构几何非线性，采用两种积分步长，分别为 $\Delta t = 0.1\text{s}$ 和 $\Delta t = 0.01\text{s}$，用平均加速度方法和能量守恒方法来计算结构的动力响应。

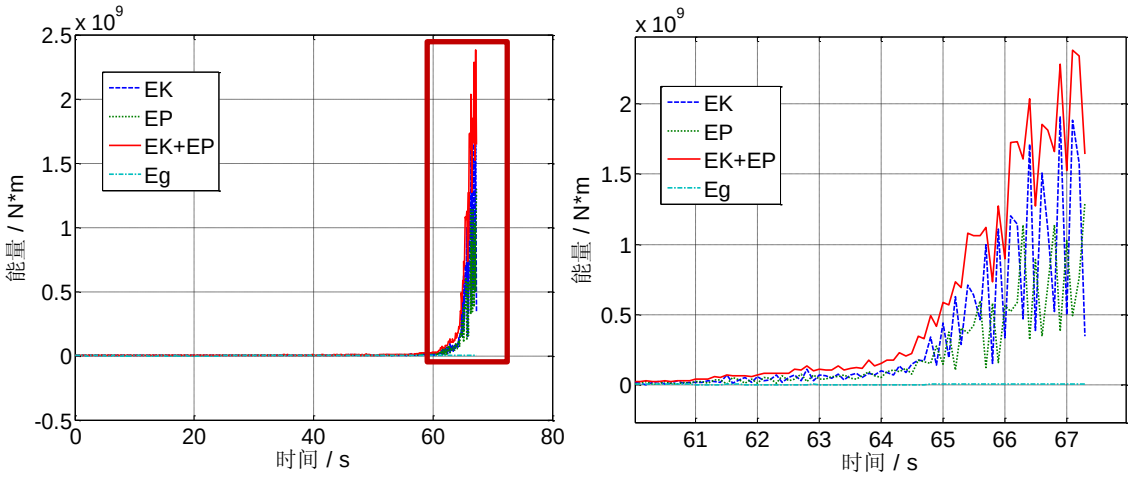


a）位移时程　　b）位移时程局部放大图

图 4-17 Δ*t*=0.1s 时两种积分方法计算的位移对比

当积分步长 $\Delta t = 0.1\text{s}$ 时，两种方法的动力响应如图 4-17 所示，可以发现，在这个积分步长下，平均加速度方法计算发散于 67.4s，完成计算 673 步，而能量守恒积分方法则很好的收敛。从图中可以看出，在计算达到 50s 之后，平均加速度方法的计算结果开始出现明显的差别，而在这之前，两种方法的计算结果相近，然

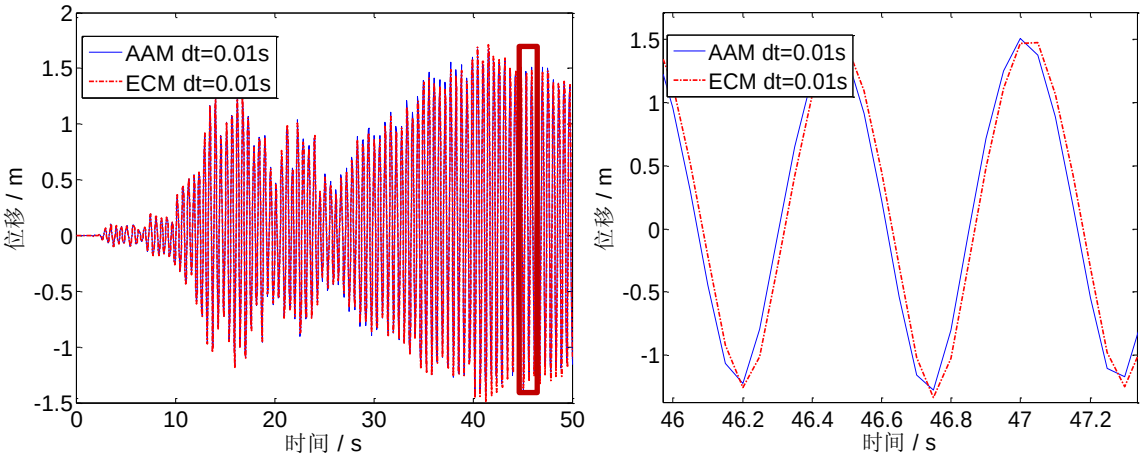
后随着时间推移，平均加速度方法计算越来越不稳定，最后偏差剧烈变化，直至发散。



a）平均加速度法计算的各部分能量时程　　b）能量时程局部放大图

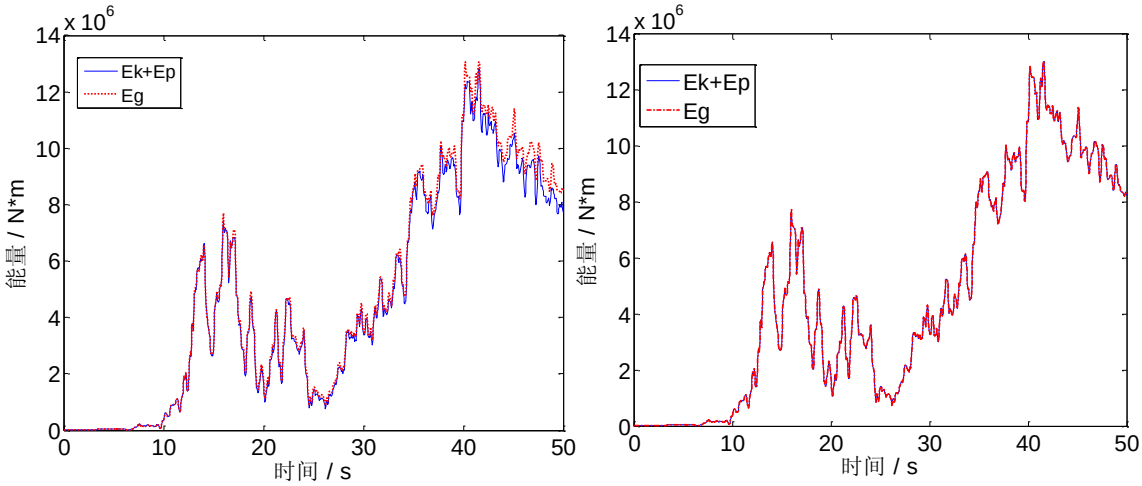
图 4-18 Δ*t*=0.1s 时平均加速度法计算的各部分能量时程

从能量的角度来看，见图 4-18，能量守恒积分方法保证了网架结构体系的机械能始终等于结构外部输入的地震动能量；而平均加速度方法则由于位移、速度和轴力的计算结果逐渐偏离正确解，且明显比正确值要大，因此计算得到的结构体系动能和内能均超出了实际情况，所以体系的机械能远远大于外部输入的地震动能量。



a）位移时程　　b）位移时程局部放大图

图 4-19 Δ*t*=0.01s 时两种积分方法计算的位移对比



a）平均加速度法计算的各部分能量时程　　b）能量法计算的各部分能量时程

图 4-20 Δ*t*=0.01s 时两种方法计算的各部分能量时程

当积分步长 $\Delta t = 0.01\text{s}$ 时， 两张方法的动力响应如图 4-19 所示，由于减小了积分步长，平均加速度方法能够收敛，并且计算出的结构响应，包括位移、速度和轴力，均与能量法计算得到的很接近。

对比两者的能量时程曲线可以看到，能量守恒积分方法依然能够保证结构的机械能与外部输入地震动产生的能量之间的平衡，而平均加速度方法虽然收敛，但是其计算结果仍然与能量法有略微差距，导致在 30s 之后计算得到的体系机械能比外部输入的地震动能量要小一些，说明即使此时平均加速度方法收敛，但是仍然通过算法引入了一些能量，这个能量来源于几何非线性的考虑。

4.3.2 双线性材料

当考虑材料非线性的时候，对网架施加竖向地震动。由于同时考虑几何非线性和材料非线性，若采用较大的积分步长，OpenSees 会出现不收敛的现象，但是并没有发散，只是当结构进入弹塑性阶段，一次变形过大，OpenSees 的收敛方法无法进行下去。因此，为了得到完整的计算结果，积分步长采用 $\Delta t = 0.01\text{s}$。

在这个情况下，计算得到的结果如图 4-21 所示，可以发现，平均加速度方法和能量守恒积分方法均收敛，并且结果几乎一模一样。从结构的动力响应位移、速度以及单元轴力的时程曲线来看，两种积分方法计算结果完全一致，并且应力应变关系曲线也符合双线性材料本构。

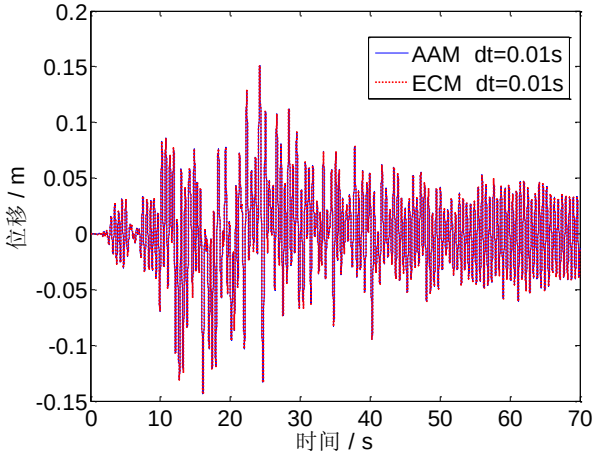


图 4-21 Δ*t*=0.01s 时平均加速度法与能量法计算的位移时程

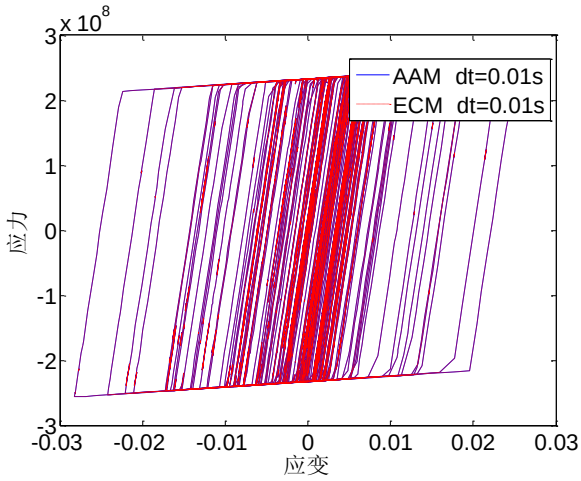


图 4-22 Δ*t*=0.01s 时两种积分方法计算的杆件应力-应变关系

从方法计算的能量曲线来对比，计算得到的能量曲线也完全一致，也就是说，结构体系的机械能等于结构受到地震动输入的能量。

两种方法并没有优劣，原因可能是在考虑材料非线性的时候，为了使计算能够达到收敛，减小了工况幅值，使体系的几何非线性体现的并不明显。再者，前面已经得出在本三维网架算例中，平均加速度方法在积分步长 $\Delta t = 0.01\text{s}$ 时能够达到收敛要求，并且计算得到的结果与能量法相差不是太多，说明该积分步长可以有效的减小平均加速度方法在考虑几何非线性时带来的能量不平衡影响。

4.3.3 计算效率

下表中列出了平均加速度方法和能量守恒积分方法在完成同样工况下的动力分析所耗费的时间，由于平均加速度方法在一些工况下出现发散的情况，没有完

成计算，因此求两种方法在计算每步所用平均时间，相比较而言，平均加速度方法比能量守恒积分方法的计算效率要略高，但是相差不是特别大，可以认为两种方法的计算效率差不多。

表 4-2 能量守恒积分法与平均加速度方法计算时间对比

积分方法	分析工况	材料	积分步长	总积分步数	总耗时	平均每步用时
AAM	自由振动	线弹性	0.1s	215	32s	0.1488372 s
			0.05s	269	34s	0.1263940 s
			0.01s	10000	1043s	0.1043 s
		双线性	0.01s	3000	265s	0.0883333 s
	2g 地震动	线弹性	0.1s	673	86s	0.1277860 s
			0.01s	7000	710s	0.1014285 s
	0.5g 地震动	双线性	0.01s	7000	627s	0.0895714 s
ECM	自由振动	线弹性	0.1s	1000	170s	0.170 s
			0.05s	2000	314s	0.157 s
			0.01s	10000	1364s	0.1364 s
		双线性	0.01s	3000	288s	0.096 s
	2g 地震动	线弹性	0.1s	700	102s	0.1457142 s
			0.01s	7000	848s	0.1211428 s
	0.5g 地震动	双线性	0.01s	7000	641s	0.0915714 s

另外可以发现，随着积分步长的减小，两种方法的计算效率均有所提高，这是由于积分步长减小，每一个积分步所要计算的动力响应较小，因此每步计算所用时间较小，需要的迭代次数也能降低。

上一节中，能量守恒积分方法在计算平面桁架的时候，效率高于平均加速度方法，而在三维网架结构中，能量守恒积分方法则慢于平均加速度方法，这是由于计算需要的过程更加复杂，需要计算的变量更多的缘故。

4.4 本章小结

为了对比能量守恒积分方法与平均加速度方法在考虑几何非线性与材料非线性下的算法特性，分别对平面桁架结构、三维网架结构以及一个加油站屋盖进行动力分析，得出以下结论：

1. 仅考虑几何非线性时，能量守恒积分方法的稳定性优于平均加速度方法，计算精确度上，能量守恒积分方法优于梯度法。

2. 在同时考虑几何非线性与材料非线性时，若几何非线性比较突出，则平均加速度方法在考虑几何非线性时的不稳定性就会体现出来；若几何非线性不明显，以材料非线性为主，则两种积分方法的计算结果接近，但是能量方法的计算结果比平均加速度方法更满足能量守恒性。
3. 在考虑几何非线性和材料非线性时，积分步长的大小对平均加速度方法的收敛性影响很大，而能量守恒积分方法则可以在更大的积分步长下收敛。
4. 由于能量守恒积分方法以中点构形为依据，在建立平衡方程时比平均加速度方法更复杂，因此在计算效率上会略低于平均加速度方法，但是相差不大。

第五章 积分方法的影响参数分析

5.1 引言

上一章对能量守恒积分方法程序进行了二维与三维网架的算例应用，分析对比了平均加速度方法与能量守恒积分方法在考虑几何非线性与材料非线性时的算法特性，发现几何非线性对平均加速度方法的稳定性影响很大。但是结构的类型、结构的几何非线性和材料非线性等对算法的应用有何种影响，平均加速度方法与能量守恒积分方法在这些条件下的应用表现如何，将通过本章进行分析。在本章中，希望通过对一个网架的材料非线性、弹性屈曲以及几何非线性的分析，从多方面角度来评价平均加速度方法，从而对平均加速度方法的应用有一个整体的了解，为科研和工程提供应用便利。

5.2 加油站屋盖网架设计参数

某加油站屋盖网架，网架覆盖面积沿长度方向 45m，沿宽度方向 15m，网架厚度 1.2m。网架采用四根柱进行多点支承，屋面采用轻型压钢屋面[51]。对于平面形状为矩形，多点支承的网架，采用正方四角锥网架。由于网架厚度 1.2m 的要求，网格尺寸不宜过大，否则杆件汇交的角度过小，因此选用 1.5m×1.5m，由此长度方向 30 个网格，宽度方向 10 个网格。结构所用钢管材料均为 Q235 钢。

进行结构设计时，考虑恒荷载、活荷载、风荷载以及温度差这几种荷载影响。其中，恒荷载包括上弦层的轻型压钢屋面板、檩条、小立柱，取均布荷载为 0.3kN/m^2，以及下弦层的灯具荷载，为 1kN/个，以集中荷载的方式加于相应位置；网架的自重由程序自动生成；活荷载主要为上弦层的屋面均布活荷载取 0.5kN/m^2；结构的风荷载中的基本风压按《建筑结构荷载规范》附录 D.4 给出的 50 年一遇的风压采用，为 0.45 kN/m^2，地面粗糙度 B 类，风压高度系数 1.0，风荷载体型系数-2.0，风振系数为 1.5，最后计算得到风荷载取-1.35 kN/m^2；另外根据当地气候资料，保守考虑施工与使用阶段±30°C 的温差变化。

计算考虑以上几种荷载工况组合，用空间结构分析设计软件 MS*T*2008[52]进行设计，得到最后的网架屋盖，其结构布置图如下所示。

本章接下来算例都进行地震分析，采用图 4-17 中的 Kobe 地震记录。

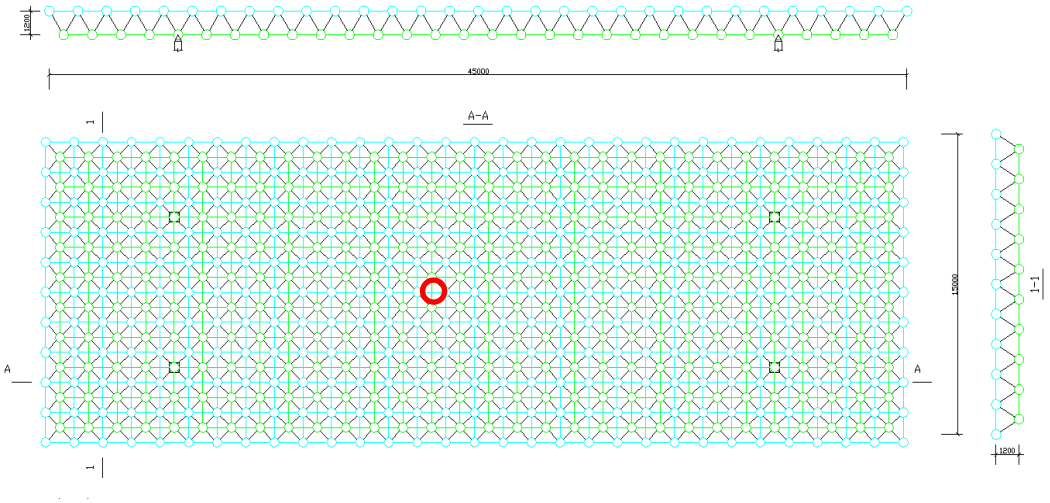


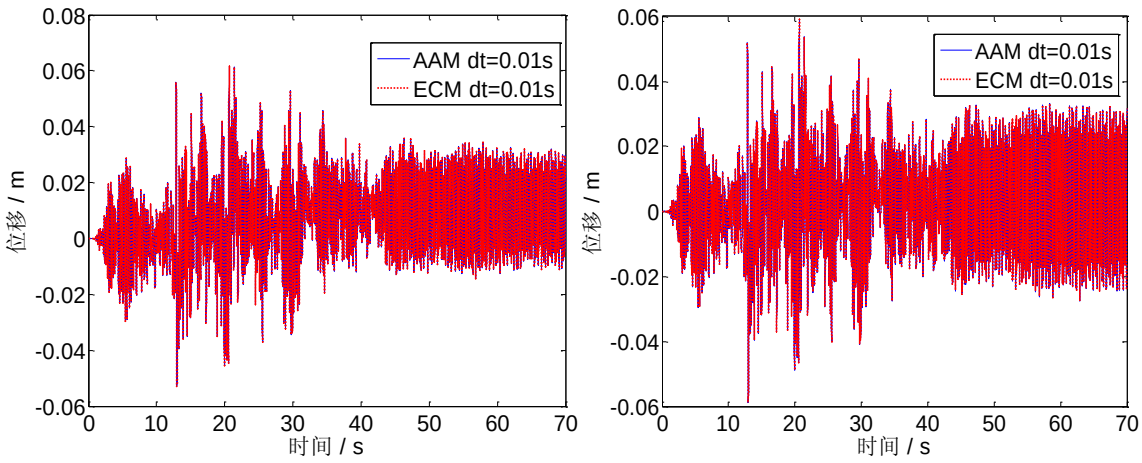
图 5-1 加油站网架结构布置图

5.3 非线性参数分析

5.3.1 双线性材料第二刚度影响分析

为了考虑结构非线性中的材料非线性对积分方法计算结果的影响，将材料非线性的第二刚度作为变化参数，分别计算第二刚度 b=0.01、b=0.1、b=0.5 以及 b=1 这四种情况，同样对结构进行竖向地震作用分析。

当结构采用双线性材料时，对结构施加第四章中采用的 Kobe 竖向地震动，幅值为 100gal。



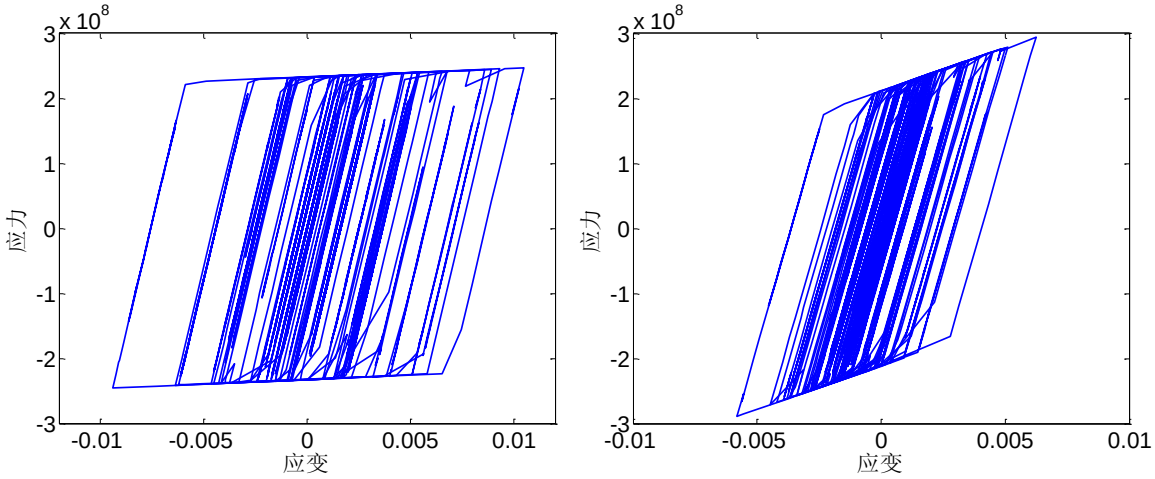
a）b=0.01　　b）b=0.1

图 5-2 两种积分方法在不同第二刚度下计算的动力响应时程曲线

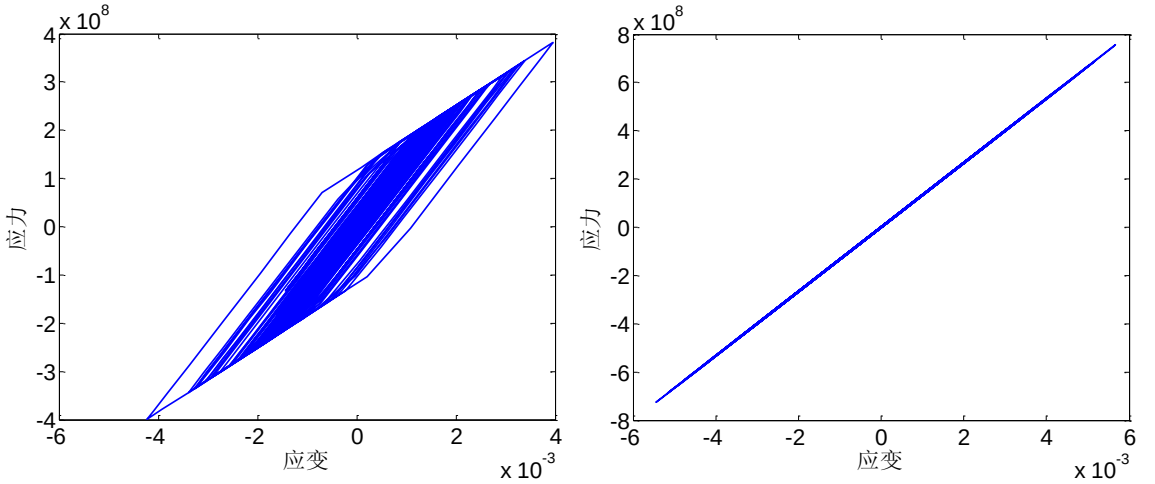
当积分步长减小到$\Delta t = 0.01\text{s}$时，输出网架结构图中跨中节点的位移响应，发现平均加速度方法就能够收敛，计算的结果虽然与能量法略有差别，但是也在可以接受的范围之内，计算结果见图 5-2

在本算例中，无论是采用何种第二刚度，平均加速度方法均收敛，并且，此时的分析结果与能量法计算得到的结果很接近，计算结果差别很小，计算结果如下图所示。

下图为结构分别采用四种第二刚度的双线性材料计算得到的杆件应力应变关系，从图中可以很明显的观察到双线性材料在四种第二刚度的情况下的实现。



a）b=0.01　　b）b=0.1



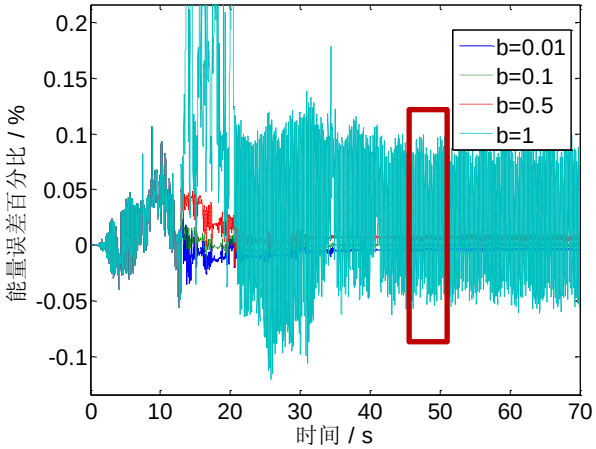
c）b=0.5　　d）b=1.0

图 5-3 四种第二刚度计算得到的应力应变关系

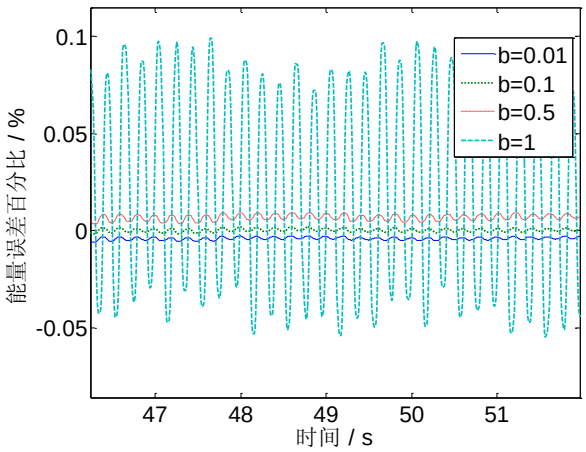
以上计算结果符合文献[23]中关于平均加速度放在非线性阻尼结构中的应用的结论，即平均加速度方法对于含有数值阻尼的结构时无条件稳定的。因为双线

性材料本身具有耗能的特性，这就使得平均加速度方法在计算过程中的能量不守恒问题得到弥补，从而使得能量不会急剧增加从而发散。

将能量守恒积分方法计算得到的能量结果作为准确值，然后计算平均加速度方法的体系机械能与外部地震动输入能量的差值，并将其与能量法的结果求百分比，作为平均加速度方法在能量方面的计算误差。



a） 不同材料非线性引起的能量误差



b）能量误差局部放大图

图 5-4 平均加速度方法计算的体系能量误差随第二刚度变化图

从图中可以观察到，随着第二刚度的增大，也就是结构的材料非线性所占比重逐渐减小，而几何非线性比重逐渐增加，体系的能量误差变得越来越大，并且其能量误差的波动幅值也逐渐增大。从误差的局部放大图可以看出，在具有材料非线性的时候，b=0.01 时的能量误差最小，而 b=0.1 和 b=0.5 时误差则都较为增加，直至 b=1 时，也就是材料变为线弹性，结构只存在几何非线性，此时的误差最大，

波动也比较剧烈，根据上一节中线弹性材料的分析，此时没有发散的原因在于给结构施加的工况比较小，结构的几何非线性体现的并不明显，并没有起到主导作用。但是从图中仍然可以看出，结构的材料非线性与几何非线性的比重对平均加速度方法的稳定性和精确性的影响。

5.3.2 弹性屈曲力影响分析

为了模拟桁架单元在动力分析过程中的屈曲问题，采用一种弹性非线性材料来模拟，如下图，杆件在受拉时体现线弹性本构关系，在受压过程中，一旦杆件进入屈曲状态，则材料显示出一种类似于双线性的本构关系，不过需要注意的是，一旦进入卸荷过程，材料并不会耗能，而是沿原来的本构关系路线返回。

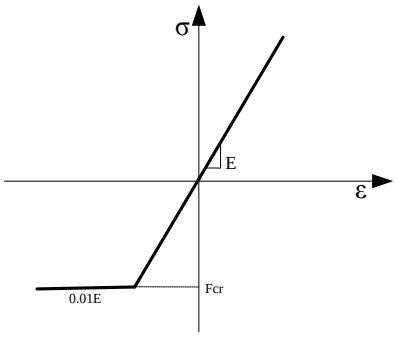


图 5-5 弹性非线性材料本构关系

首先根据前面结构的设计结果，考虑杆件的截面及长度，取杆件的屈曲力为100MPa，对结构施加竖向地震动。分别采用平均加速度方法（AAM）和能量守恒积分方法（ECM）来进行计算，取积分步长 $\Delta t = 0.01\text{s}$。

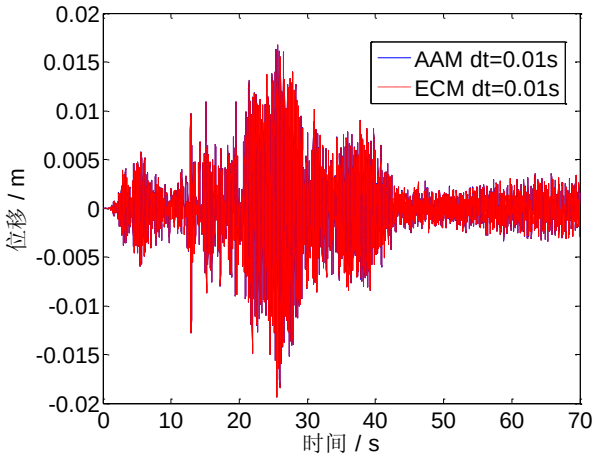


图 5-6 两种积分方法计算的跨中位移时程

从位移时程图中可以看到，平均加速度方法（AAM）与能量守恒积分方法（ECM）的计算结果很接近，并且没有发散的现象，这是由于采用了符合稳定条件的的积分步长。

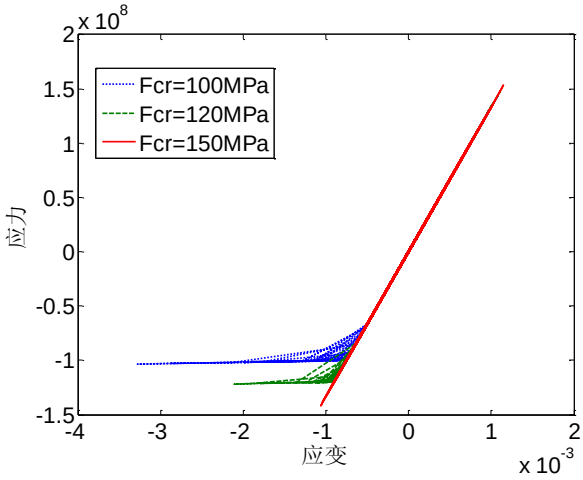
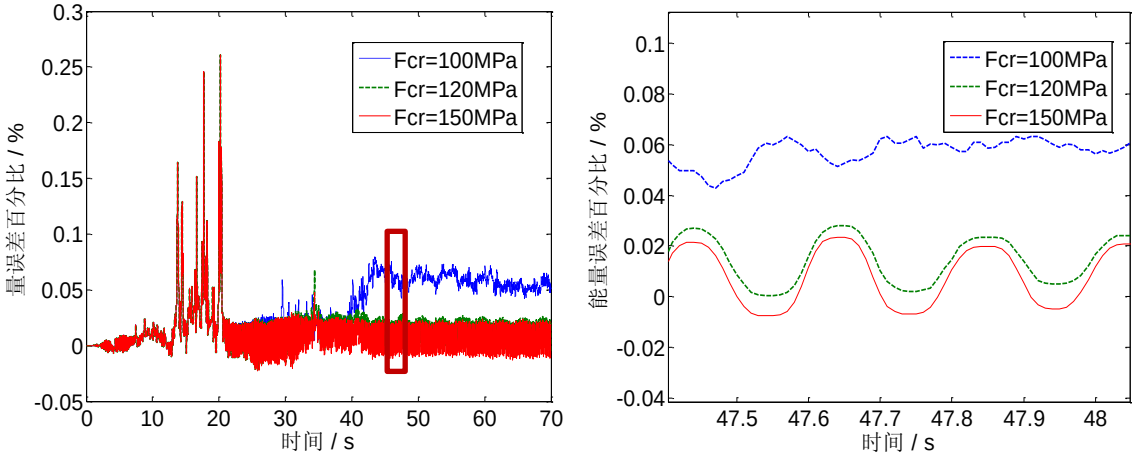


图 5-7 不同弹性屈曲力下杆件的应力应变关系

接着考虑弹性屈曲力对平均加速度方法的非线性分析的影响，为此，逐步提高弹性屈曲力，分别计算 F_{cr}=120MPa 和 F_{cr}=150MPa 时的动力响应。三种屈曲力在同一工况作用下，得到的杆件应力应变关系如下图所示。

从应力应变关系中可以看到，当弹性屈曲力 F_{cr}=100MPa 和 120MPa 时，杆件是具有弹性非线性的特性的，但是当 F_{cr}=150MP 时，杆件没有进入到弹性屈曲的阶段，也就是说材料可以视为线弹性材料。



a）平均加速度方法能量误差　　b）局部放大图

图 5-8 平均加速度计算的能量误差

从图 5-11 中可以看到，随着弹性屈曲力的减小，结构从线弹性状态进入到弹

性非线性本构，而屈曲力的减小，也就是结构的弹性屈曲越来越大，即这种弹性非线性程度越来越大。

图 5-8 是平均加速度方法计算的能量误差。从能量的角度来看，弹性非线性越大，能量的误差也越大，从而计算的结构动力响应误差也越大。

5.3.3 平均加速度方法的稳定条件

上一章中对平面桁架和三维网架进行了动力分析，发现平均加速度方法在考虑几何非线性时成为了一种条件稳定的积分方法，而能量守恒积分方法则无条件稳定，因此本节讨论平均加速度方法在考虑几何非线性的时的应用条件。

一般积分方法的稳定性与结构的最小周期有关，但是本文考虑了几何非线性的影响，因此，假定平均加速度方法的稳定条件为

$$\Delta \boldsymbol{t} \le \boldsymbol{f}(\boldsymbol{T_n}, \eta) \tag{5-1}$$

其中 $\boldsymbol{T_n}$ 为结构的最小周期，η 为动力分析的结构最大位移与结构跨度之比，用来表征结构几何非线性的大小。

从算例中可以看出，平均加速度方法在较大的几何非线性工况下，需要较小的积分步长来达到收敛。由于几何非线性需要结构的位移来衡量，几何非线性越大，平均加速度方法越容易发散。因此设定拟合公式 $\boldsymbol{f}$ 时加大挠度 η 的影响程度，提出以下的稳定界限

$$\Delta \boldsymbol{t} \le \frac{\alpha \boldsymbol{T_n}}{\eta^2} \tag{5-2}$$

其中 α 为一个常数系数，通过前面算例计算得到的结果来确定。

将两个算例的线弹性分析情况列入下表。

表 5-1 平均加速度方法非线性算例分析结果

结构	最小周期	积分步长	挠度	$\boldsymbol{T_n}/\eta^2$	α	收敛性
平面桁架	0.00083s	0.01s	1/16	0.21248s	0.0471	发散
		0.005s			0.02353	发散
		0.001s			0.00471	**收敛**
四边支承网架	0.00218s	0.1s	5/64	0.3572s	0.28	发散
		0.05s			0.14	发散
		0.01s			0.028	**收敛**

从表格中各个工况下的α值，找到范围α≤0.02353，取α=0.01。

结合前面提出的稳定界限，将α=0.01 带入式（5-2）中，得到平均加速度方法的积分步长界限：

$$\Delta t \le \frac{0.01T_n}{\eta^2} \tag{5-3}$$

由于一般在进行分析前并不知道结构会产生多大位移，因此为了方便使用，取

$$\Delta t \le 5T_n \tag{5-4}$$

如果事先知道了结构的最大位移，那么就取式（5-3）与简化公式（5-4）的较小值作为平均加速度方法的稳定界限。

下面进行加油站屋盖网架的非线性动力分析，事先得到网架的最小周期 Tn=0.002965s，此时应用上述平均平均加速度方法的积分步长条件，先采用式（5-4），要求积分步长$\Delta t \le 5\times 0.002965 = 0.014825s$，故取$\Delta t = 0.01\text{s}$，分析的结果如下图所示。

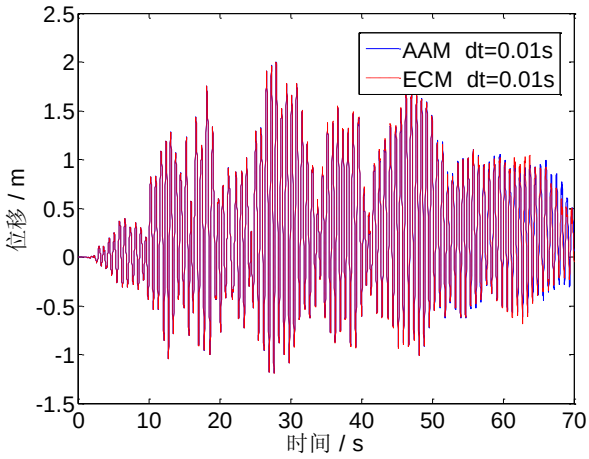


图 5-9 Δt=0.01s 时两种积分方法计算的位移响应

从图 5-9 中可以看出，采用$\Delta t = 0.01\text{s}$的积分步长时，平均加速度方法收敛，也就是该步长满足了稳定条件，说明根据式（5-4）计算得到的平均加速度方法稳定条件满足收敛要求，计算方法可行。

另外，从该位移图中可以得到结构的最大位移为 2m，那么将位移与结构跨度算出的挠度值即可算出，为 2/45，将其带入式中，得到$\Delta t \le 0.0150\text{s}$，两个稳定界限取较小值，也就是 0.014825，仍然符合前面的计算结果。

为了验证该结论，采用更大的积分步长，分别计算$\Delta t = 0.02\text{s}$和$\Delta t = 0.05\text{s}$时的动力响应，结果如下图所示。

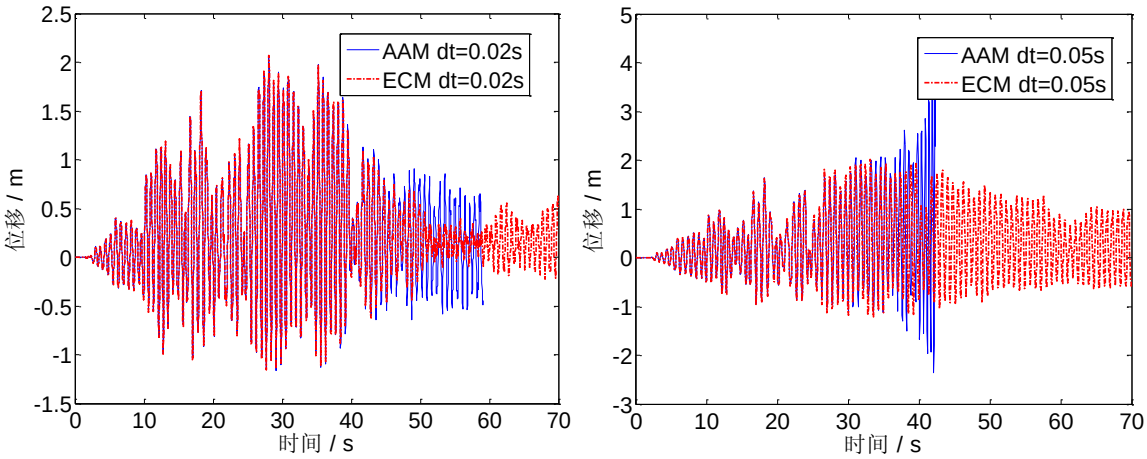


图 5-10 不同积分步长下两种积分方法计算的位移时程对比

从位移时程图上可以看出，在积分步长 $\Delta t = 0.02\text{s}$ 以及 $\Delta t = 0.05\text{s}$ 时，平均加速度均发散，说明这两个积分步长均超出了此时平均加速度方法的稳定界限，而只有在步长 $\Delta t = 0.01\text{s}$ 时，平均加速度方法才达到收敛要求，这也证明了了本文提出的平均加速度方法的稳定界限是可行的。需要指出，能量守恒积分方法在任何积分步长下都能保持很好的稳定性。

式（5-3）提出的平均加速度方法稳定界限，需要事先知道结构会产生的最大位移，从而考虑几何非线性的参数，这一点一般比较难以实现，因此本文建议采用提出的简化公式计算得到一个平均加速度方法的稳定条件，然后进行分析。这一点无论是对实际工程还是科学研究都适用。当然，对于实际工程中对结构有挠度的限值，比如大跨空间结构限制挠度在 1/250 以内，也可以将其代入式（5-3）然后进行计算，但是最后采用的限值必须要取式（5-3）与（5-4）的较小值。

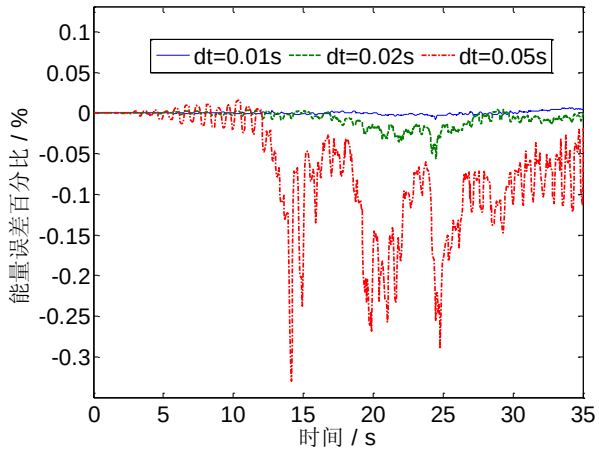


图 5-11 不同积分步长下平均加速度方法计算得到的能量误差

另外，对比三种积分步长下的平均加速度方法的计算误差，也可以发现积分步长对平均加速度方法的计算精确度的影响。

从能量守恒的角度来说，体系的机械能与外部输入能量应该相等，这一点能量守恒积分方法能实现，但是平均加速度方法并没有做到。因此以能量守恒积分方法的计算结果为标准，计算平均加速度方法的体系机械能与外部输入地震动能量之间的误差，结果如图 5-11 所示。从图中可以看出，随着积分步长的增大，平均加速度方法在计算得到的能量误差越来越大，这也就导致了整个体系的能量不守恒，最后出现发散的结果。

由上述的算例结果可以看出，平均加速度方法在考虑几何非线性时是条件稳定的，其稳定性受结构的基本周期和结构几何非线性大小的影响，而能量守恒积分方法始终保持稳定，是一种无条件稳定的积分方法，因此建议在进行结构动力非线性分析时采用能量守恒积分方法。

5.4 本章小结

本章采用一个实际工程中的加油站网架屋盖作为分析对象，分别用平均加速度方法和能量守恒积分方法对其进行分析。通过不同的材料来考虑结构中的几何非线性、材料非线性以及屈曲问题，主要得出以下结论：

1. 当结构同时存在几何非线性和材料非线性，并且几何非线性并不明显时，平均加速度方法与能量守恒积分方法得到的结果接近，但是从能量的角度来看，随着双线性材料的第二刚度逐渐减小，也就是结构的材料非线性逐渐增加，平均加速度的计算误差能够逐渐减小。
2. 当考虑杆件弹性屈曲的时候，随着屈曲力的减小，结构的弹性非线性逐渐增大，平均加速度方法计算的结果误差逐渐增大。
3. 当结构考虑几何非线性时，平均加速度方法的稳定性受积分步长的影响，只有在较小的步长下才能收敛，本文提出了平均加速度方法的稳定界限计算方法，经算例验证有效。另外，从能量的角度看，平均加速度方法计算得到的能量误差随着积分步长的增大而增大，这也是其考虑几何非线性时条件稳定的原因。

结 论

本文从能量的角度对能量守恒积分方法以及平均加速度方法进行了研究，并且尝试对 OpenSees 进行二次开发，将能量守恒积分方法加入到 OpenSees 中，通过一些算例分析，得到以下结论：

1. 从理论上推导了能量守恒积分方法和平均加速度方法在考虑几何非线性时的能量增量，结果表明，能量守恒积分方法的能量增量为 0，而平均加速度方法能量增量步为 0，在整个动力分析过程中总能量增量可能为正也可能为负。根据积分方法的能量准则判断，能量守恒积分方法是无条件稳定的，而平均加速度方法则可能收敛也可能发散，其稳定性受积分步长影响，因此是条件稳定的。
2. 探索了 OpenSees 在进行动力分析时的理论框架，并将其与 OpenSees 程序源代码对应联系起来，将能量守恒积分方法的理论按照 OpenSees 的分析框架进行分割，每一块完成各自的任务，通过有限元分析的主要流程进行组装，完成能量守恒积分方法在 OpenSees 中的实现。通过一个单摆算例，验证了能量守恒积分方法程序的有效性和正确性，并且从能量的角度揭示了能量守恒积分方法由于能量增量为 0 而无条件稳定；平均加速度方法的能量增量可能为正可能为负，因此其稳定性受积分步长的影响，是条件稳定；梯度法的能量增量为负，体系能量有界，因此为无条件稳定。
3. 通过平面桁架模型、三维网架模型和加油站屋盖网架的算例，继续验证以 OpenSees 为平台的能量守恒积分方法程序的应用范围，结果表明可以进行二维或三维的大跨空间结构动力分析。
4. 对三种结构进行分析时考虑了几何非线性和材料非线性，通过调整积分步长来验证积分方法的稳定性。计算的结果表明，几何非线性对积分方法的影响最大，较大的几何非线性存在时，平均加速度方法需要较小的积分步长才能收敛，因此属于条件稳定的积分方法，利用本文提出的平均加速度方法稳定条件，验证了方法的有效性，可以作为使用平均加速度方法的一个初步判断；而能量守恒积分方法则无论几何非线性和积分步长的大小都能保持无条件稳定的特性。
5. 在考虑材料非线性的时候，平均加速度方法是无条件稳定的，但是其计算的误差随着材料非线性的减小而增大，因而能量法在计算精确性上优于平均加速度方法。考虑屈曲力的时候，随着屈曲力的减小，弹性非线性增强，平均加速度方法计算的误差逐渐增大。
6. 对比平均加速度方法与能量守恒积分方法的计算效率，虽然能量守恒积分方法是基于能量平衡建立运动方程，计算恢复力的时候比平均加速度方法更复杂，

但是两种方法的计算效率差不多。

7. 由于能量守恒积分方法在稳定性和精确度上均优于平均加速度方法，因此在进行结构非线性动力分析的时候，建议采用能量守恒积分方法。

对于能量守恒积分方法在大跨空间结构中的应用，还存在以下的问题，需要进一步的进行研究：

1. 能量守恒积分方法虽然在 OpenSees 中实现，但是在代码中还存在一些不足，需要更进一步的优化代码，从而提高用能量守恒积分方法时的计算效率。
2. 要将能量守恒积分方法真正应用到实际大跨空间结构中，需要更好的模拟桁架单元在动力作用时的变化，因此还需要一种能够同时考虑桁架杆件屈曲和弹塑性耗能的材料来描述这种动力响应，这一种材料还需要进一步研究并且加入到 OpenSees 中。
3. 对平均加速度方法在考虑几何非线性时的稳定条件的公式还不够明确，影响非线性分析稳定性的因素还有很多，需要进一步完善。

参考文献

[1] K.J.巴特，E.L.威尔逊. 有限元分析中的数值方法[M]. 1985: 308~309

[2] Stewart. Warning-handle with care，Nature[J], 355, 16~17 (1992)

[3] Erlicher，L.Bonaventura，O.S.Bursi. The Analysis of the Generalized-α Method for Non-Linear Dynamic Problems[J]. Computational Mechanics. 2002, (28): 83~104

[4] Y.M.Xie，G.P.Steven. Instability, Chaos, and Growth and Decay of Energy of Time-Stepping Schemes for Non-Linear Dynamic Equations[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1994, (10): 393~401

[5] T.J.R.Hughes. A Note on the Stability of Newmark's Algorithm in Nonlinear Structural Dynamics[J]. Int. J. Num. Meth. Eng. 1977, 11(2): 383~386

[6] H.G.Zhong. M.A.Crisfield. An energy-conserving co-rotational procedure for the dynamics of shell structures [J]. Engineering Computations. 1998. 15(5): 552~576

[7] Dokainish MA，Subbaraj K. A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics[J]. Computers & Structures. 1989, 32(6): 1371~1386

[8] 李小军，廖振鹏，杜修力. 有阻尼体系动力问题的一种显式解法[J]. 地震工程与工程振动，1992, 12(4): 74~80

[9] 杜修力, 王进廷. 阻尼弹性结构动力计算的显式差分法[J]. 工程力学，2000, 17(5): 37~43

[10] B.Wu，G.Xu，Q.Wang，M.Williams. Operator-Splitting Method for Real-Time Substructure Testing[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 2006, 35: 293~314

[11] Chang SY. Explicit Pseudodynamic Algorithm with Unconditional Stability[J]. Journal of Engineering Mechanics. 2002, 128(9): 935~947

[12] N.W.Newmark. A Method of Computation for Structural Dynamics[J]. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE. 1959, 85: 67~94

[13] E.L.Wilson，I.Farhoomand，K.J.Bathe. Nonlinear Dynamics Analysis of Complex Structures[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1973, 1: 241~252

[14] K.J. Bathe, E.L. Wilson. Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1973, (2): 69~97

[15] G.M.Hilber，T.J.R.Hughes，R.L.Taylor. Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1977, 5: 283~292

[16] G.M.Hulbert，J.Chung. Explicit Time Integration Algorithms for Structural Dynamics with Optimal Numerical Dissipation[J]. Computer Methods in Applied Mmechanics and Engineering. 1996, 137:175~188

[17] 王焕定，张永山，王伟等. 非线性结构时程分析的高阶单步法[J]. 地震工程与工程振动，1996, 16 (3): 48~54

[18] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报，1994, 34 (2): 131~136

[19] 汪梦甫，区达光. 精细积分方法的评估与改进[J]. 计算力学学报，2004, 21 (6): 728~733

[20] T.J.R.Hughes. Stability, Convergence and Growth and Decay of Energy of the Average Acceleration Method in Nonlinear Structural Dynamics[J]. Comput. Struct. 1976, (6): 313~324

[21] J.C.Simo，T.J.R.Hughes. Computational inelasticity [M]. New York: Springer Verlag. 1998: 225~228

[22] 李妍. 防屈曲支撑的抗震性能及子结构试验方法[D]. 哈尔滨工业大学工学博士论文. 2006: 59~81

[23] Li Yan，Wu Bin. Stability of average acceleration method for structures with nonlinear damping [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration. 2006. 5(1): 87~92

[24] E.Haug，0.S.Nguyen. ‘An improved energy conserving implicit time, integration algorithmfor nonlinear dynamic structural analysis’ [C], Proc. 4th Inr. ConJ on Struct. Mech. in Reactor Tech., San Francisco.August 1977:55~67

[25] M.A.Crisfield，U.Galvanetto. Dynamics of 3-D co-rotational beams[J]. Computational Mechanics 20(1997) 507~519

[26] I.Romero，F.Armero. An objective finite element approximation of the kinematics of geometrically exact rods and its use in the formulation of an energy–momentum conserving scheme in dynamics[J]. International Journal For Numerical Methods in Engineering Int. J. Numer. Meth. Engng 2002; 54: 1683~1716.

[27] I.Romero，F.Armero. Numerical integration of the stiff dynamics of geometrically exact shells: an energy-dissipative momentum-conserving scheme[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering Int.J.Numer.Meth.Engng 2002; 54: 1043~1086.

[28] Adnan Ibrahimbegovic，Said Mamouri. Energy conserving/decaying implicit time-stepping scheme for nonlinear dynamics of three-dimensional beams undergoing finite rotations[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191. 2002: 4241~4258

[29] M.Gams，I.Planinc，M. Saje. Energy conserving time integration scheme for geometrically exact beam[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196. 2007: 2117~2129

[30] P.Betsch，P.Steinmanny. Inherently Energy Conserving Time Finite Elements for Classical Mechanics[J]. Journal of Computational Physics 160**,**2000: 88~116

[31] E.Graham，G.Jelenic，M.A.Crisfield. A note on the equivalence of two recent time-integration schemes for N-body problems[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering. Commun. Numer. Meth. Engng 2002; 18:615~620.

[32] William Taylor Matias Silva，Luciano Mendes Bezerra. Performance of Composite Implicit Time Integration Scheme for Nonlinear Dynamic Analysis[J]. Mathematical Problems in EngineeringVolume 2008, Article ID 815029, 16 pages

[33] Ignacio Romero. An analysis of the stress formula for energy-momentum methods in nonlinear elastodynamics[J]. Comput Mech . 125**,** 2002: 134~147

[34] 肖潇，关富玲，程亮. 基于能量动量方法的空间薄膜结构的展开分析[J].工程力学, Vol.28 No.4, 2011:122~127

[35] T.J.R.Hughes，T.K.Caughey，W.K.Liu. Finite-Element Methods for Nonlinear Elastodynamics which Conserve Energy[J]. Journal Applied Mechanics. 1978, 45: 366~370

[36] D.Kuhl，M.A.Crisfield. Energy-Conserving and Decaying Algorithms in Non Linear Structural Dynamics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1999, 45: 569~599

[37] D.Kuhl，E.Ramm. Generalized Energy-Momentum Method for Nonlinear Adaptive Shell Dynamics[J]. Computer Methods in Applied Mmechanics and Engineering. 1999, 178: 343~366

[38] D. Kuhl，E.Ramm. Constraint Energy Momentum Algorithm and its Application to Non-linear Dynamics of Shells[J]. Computer Methods in Applied Mmechanics and Engineering. 1996, 136: 293~315

[39] J.C.Simo，N.Tarnow. The Discrete Energy-Momentum Methods: Conserving Algorithms for Nonlinear Elastodynamics[J].Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 1992, 43, 757~793

[40] M.A.Crisfield，J.Shi. A Co-Rotational Element/Time Integration Strategy for Non-Linear Dynamics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1994, 37: 1897~1913

[41] M.A.Crisfield，J.Shi. An energy conserving co-rotational procedure for non-linaer dynamics with finite elements[J].in M.S.Pereira et al.(eds.), Proc. NATO Advanced Study Institute on Computer Aided Analysis o/Rigid and Flexible Mechanical Systems, Vol. 11. IDMEC, Troia, Portugal, July 1993, pp. 197~214.

[42] 潘天林，吴斌，郭丽娜，陈永盛. 能量守恒逐步积分方法在工程结构动力分析中的应用[J].工程力学，DOI:10.6052/j.issn.1000~4750.2013.04.0303

[43] B.Wu，G.Xu，Q.Wang，M.Williams. Operator-Splitting Method for Real-Time Substructure Testing[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 2006, 35: 293~314

[44] Francis Thomas Mckenna. Object-Oriented Finite Element Programming: Frameworks for Analysis[J],Algorithms and Parallel Computing.1997.31~34

[45] Band RE，Coughran WM，Fichter W. Transient Simulation of Silicon Devices and Circuits[J]. IEEE Trans CAD 1985.436~451

[46] K.J.Bathe.Conserving energy and momentum in nonlinear dynamics:A simple implicit integration scheme[J]. Computers and Structures 85. 2007. 437~445

[47] U.Galvanetto. M.A.Crisfield. An energy-conserving co-rotational procedure for the dynamics of planar beam structures[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,Vol,39,2265~2282.1996

[48] X.Peng and M.A.Crisfield . A consistent co-rotational formulation for sheels using triangular elements with constant strain and constant curvature[J]. Int.J. numer. methods eng.35,1829~1847,1992

[49]唐敢等. 空间结构-地基动力相互作用的三维时域数值分析方法[J].工程力学,2007,26(8):143~150.

[50] 张毅刚等. 大跨空间结构. [M].北京：机械工业出版社.2005:99~100
[51] 杜文凤. 网架、网壳结构设计实例与解析[M].北京：中国电力出版社. 2012:69~72
[52] 罗尧治. MST2008 软件使用说明书[M]. 杭州：浙江大学空间结构研究中心. 2008:34~55

哈尔滨工业大学学位论文原创性声明和使用权限

学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的学位论文《基于能量守恒积分方法的结构非线性分析》，是本人在导师指导下，在哈尔滨工业大学攻读学位期间独立进行研究工作所取得的成果，且学位论文中除已标注引用文献的部分外不包含他人完成或已发表的研究成果。对本学位论文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。

作者签名：　　日期：2014　年 7 月 2 日

学位论文使用权限

学位论文是研究生在哈尔滨工业大学攻读学位期间完成的成果，知识产权归属哈尔滨工业大学。学位论文的使用权限如下：

（1）学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文，并向国家图书馆报送学位论文；（2）学校可以将学位论文部分或全部内容编入有关数据库进行检索和提供相应阅览服务；（3）研究生毕业后发表与此学位论文研究成果相关的学术论文和其他成果时，应征得导师同意，且第一署名单位为哈尔滨工业大学。

保密论文在保密期内遵守有关保密规定，解密后适用于此使用权限规定。

本人知悉学位论文的使用权限，并将遵守有关规定。

作者签名：　　日期：2014　年 7 月 2 日

导师签名：　　日期：2014　年 7 月 2 日

致 谢

转眼间，我已经在这炎炎夏日到来之际完成了我的硕士学位论文。这两年，是我人生中非常重要的两年。两年的时间的确短了些，短的还没来得及嘻嘻品位，就要挥手告别。如果为我这两年的读研生活做个概括的话，我想是幸运、转变、成长和感谢。幸运的是能够进入哈尔滨工业大学土木工程学院，结识到这么多良师益友；我从一个不知学术的懵懂少年，转变到对研究的一丝不苟，更加严谨的去面对这个世界；太多的人和事，值得我去感谢，绝不仅仅是即将出现在下面的人。

首先，我想把我最高的敬意献给我的导师——吴斌教授。师者，传道受业解惑也。我想用这句话来描绘恩师。他对学术执着的信念和对整个学科领域发展的忧心与官话，如布道师般为我们引路在前；他的谆谆教诲，给我们信念和力量，更给了我们自主发展的空间；每当陷入困境时，老师几句点拨却经常有拨云见日之效。每在科研彷徨茫然之际，想到恩师孜孜不倦耕耘之状，我也为之所感，奋发向前。两年中，老师没有一句批评，有的只是鼓励和启迪。在这两年的研究学习中，吴老师对我的影响甚深，也将影响我接下来的人生旅途。

其次，我要感谢我的师兄潘天林、陈永盛以及师姐杨格，是他们为我的课题出谋划策，有了他们的建议和帮助，我的研究克服了一个个困难。对于我那些很浅显或者很繁琐的问题，他们都不厌其烦的抽出自己的时间帮助我，让我顺利跨过难关。

再次，我要感谢教研室所有的师兄师姐和同学们，他们是许国山、王贞、丁勇、王涛、张家广、梅洋、曾聪、李伟、梅竹、鲁军凯、李波、宁西占、郑震云、刘斌、杨凯博、杨婧以及秘书许海霞，与你们生活的这一年，我受益良多。

感谢我的父母家人，让我感受到温暖和关爱，知道有一个随时停歇的爱的港湾。

最后，我要感谢我的爱人龚碧芸，她承受着两年的分别，对于我不能常伴左右，不曾有过怨言，坚定地支持和鼓励我的学业。在这里，我想对她说，“谢谢”，同时，我会为了我们共同的未来而不懈努力。

汤振

2014 年 7 月于哈尔滨工业大学